

על הוכחות ומשחקים

ארז נשרים

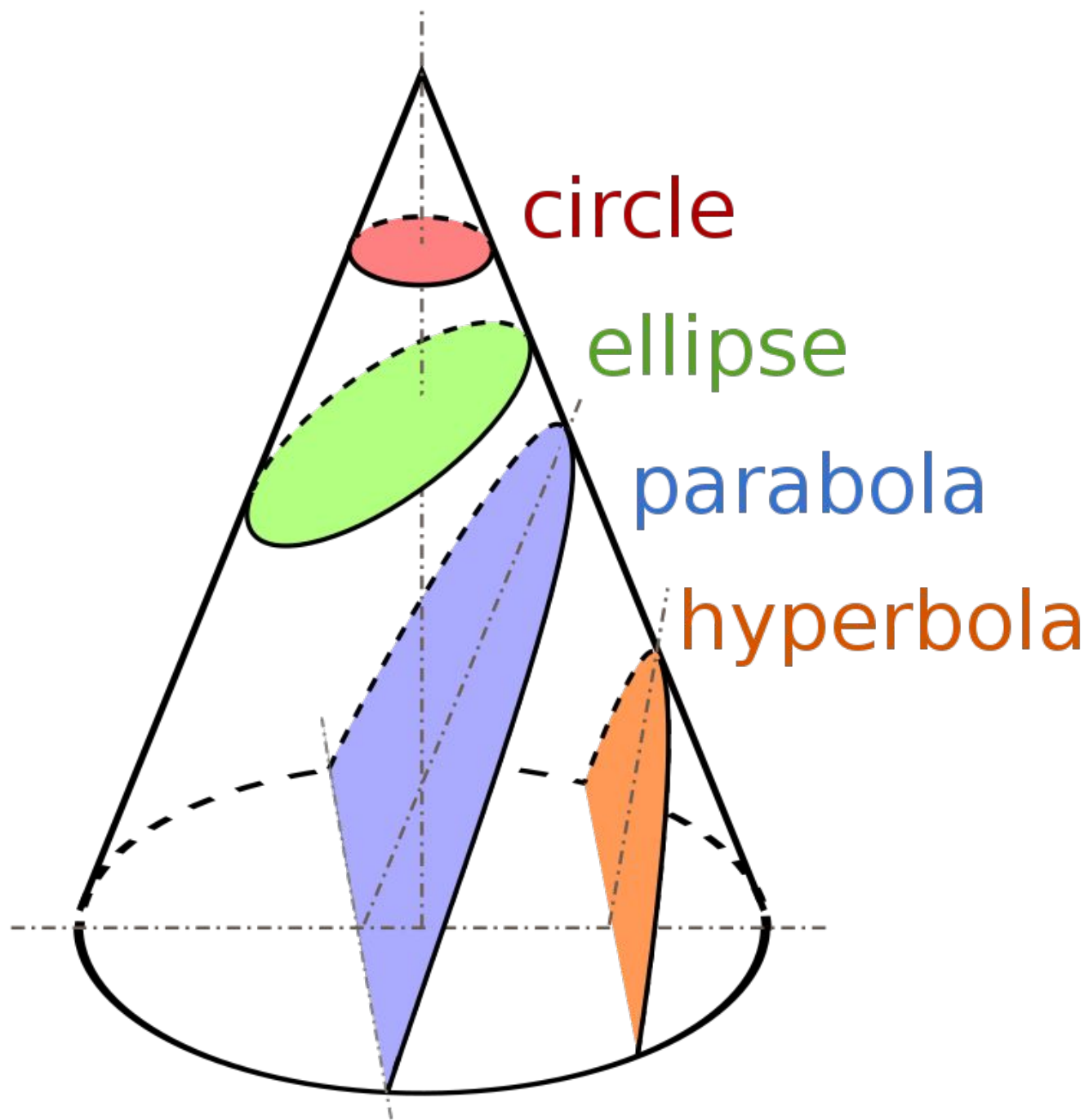
ליל המדענים האירופי, 19.9.2019

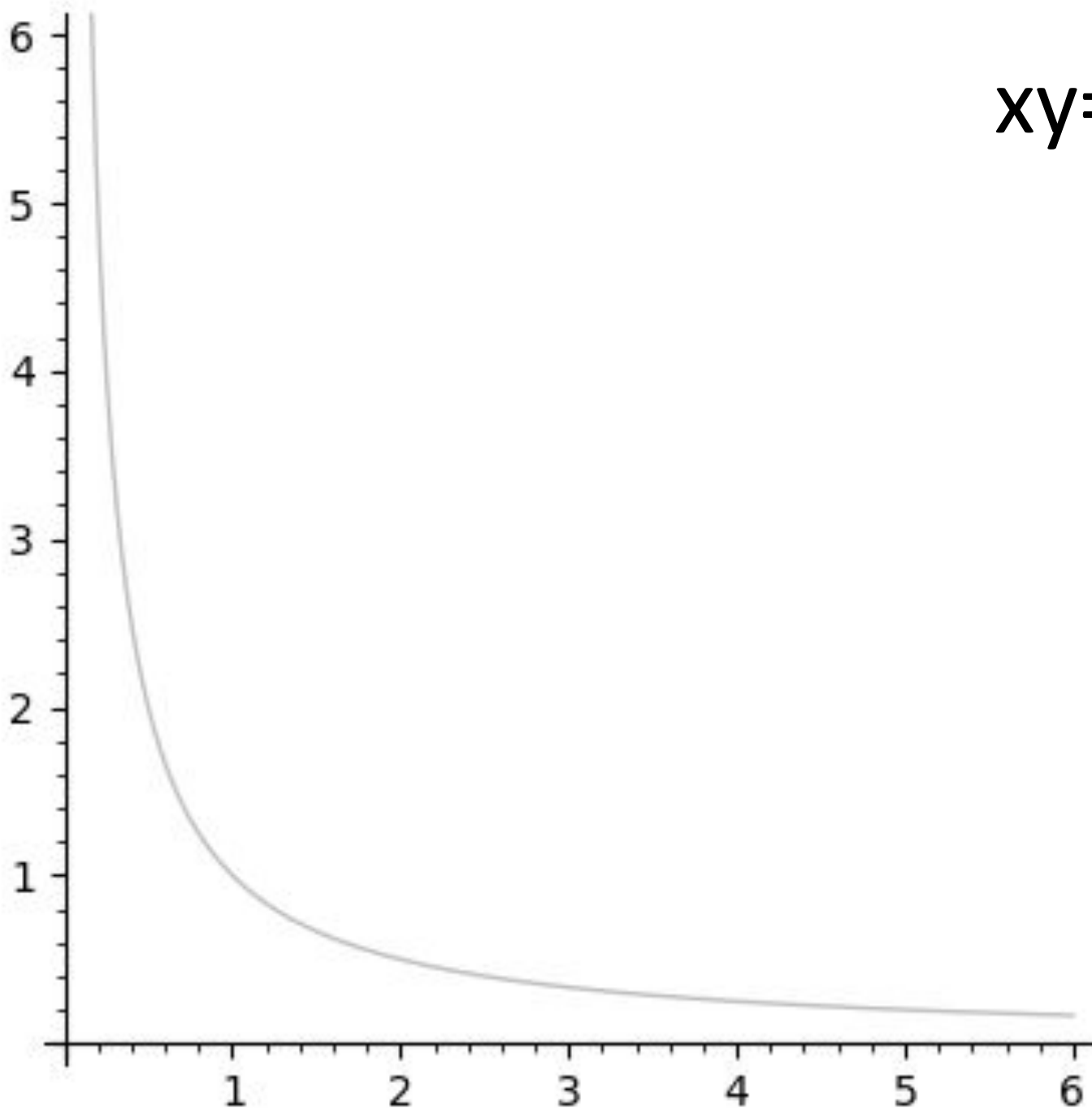


European Research Council

Established by the European Commission

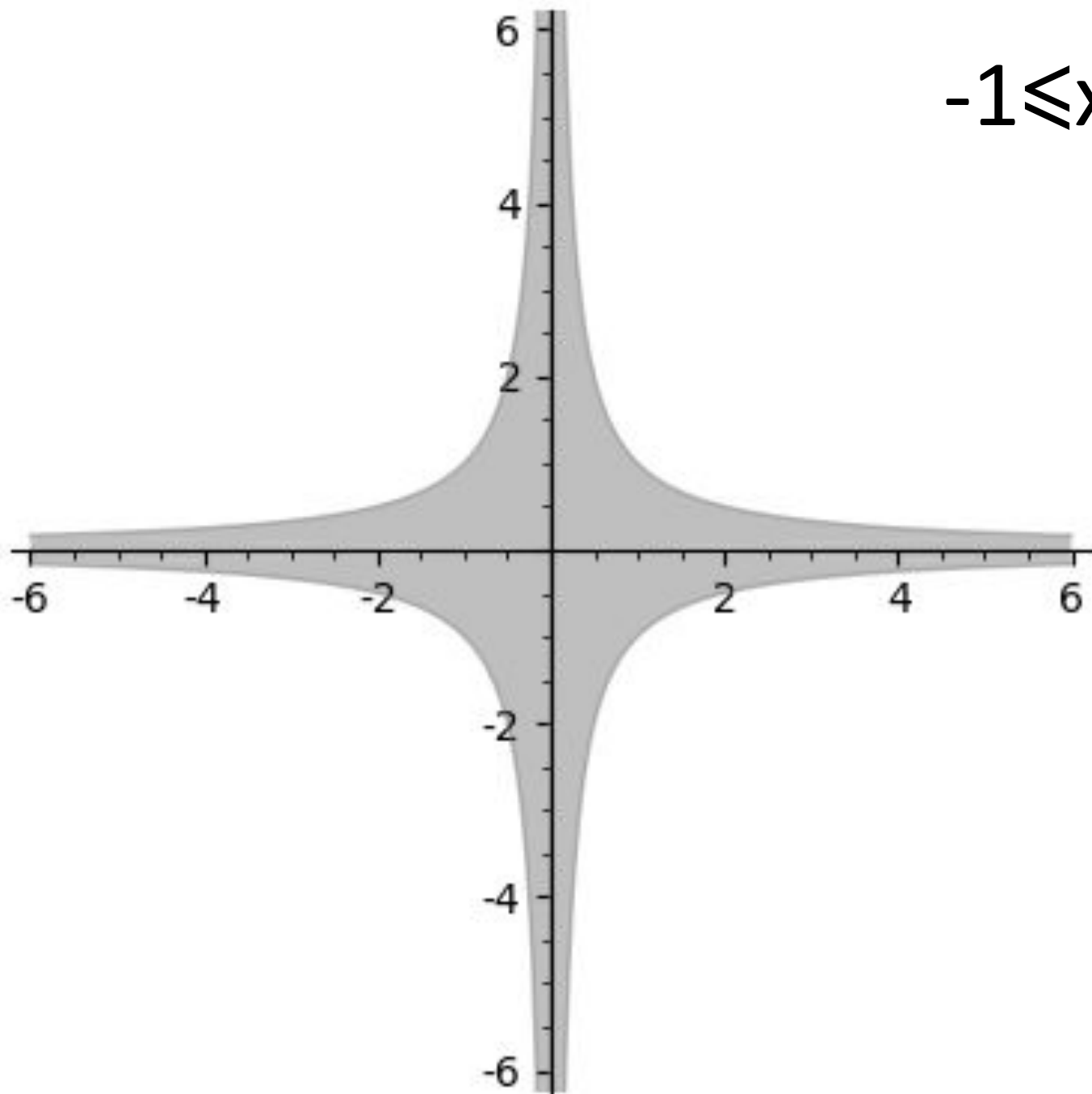




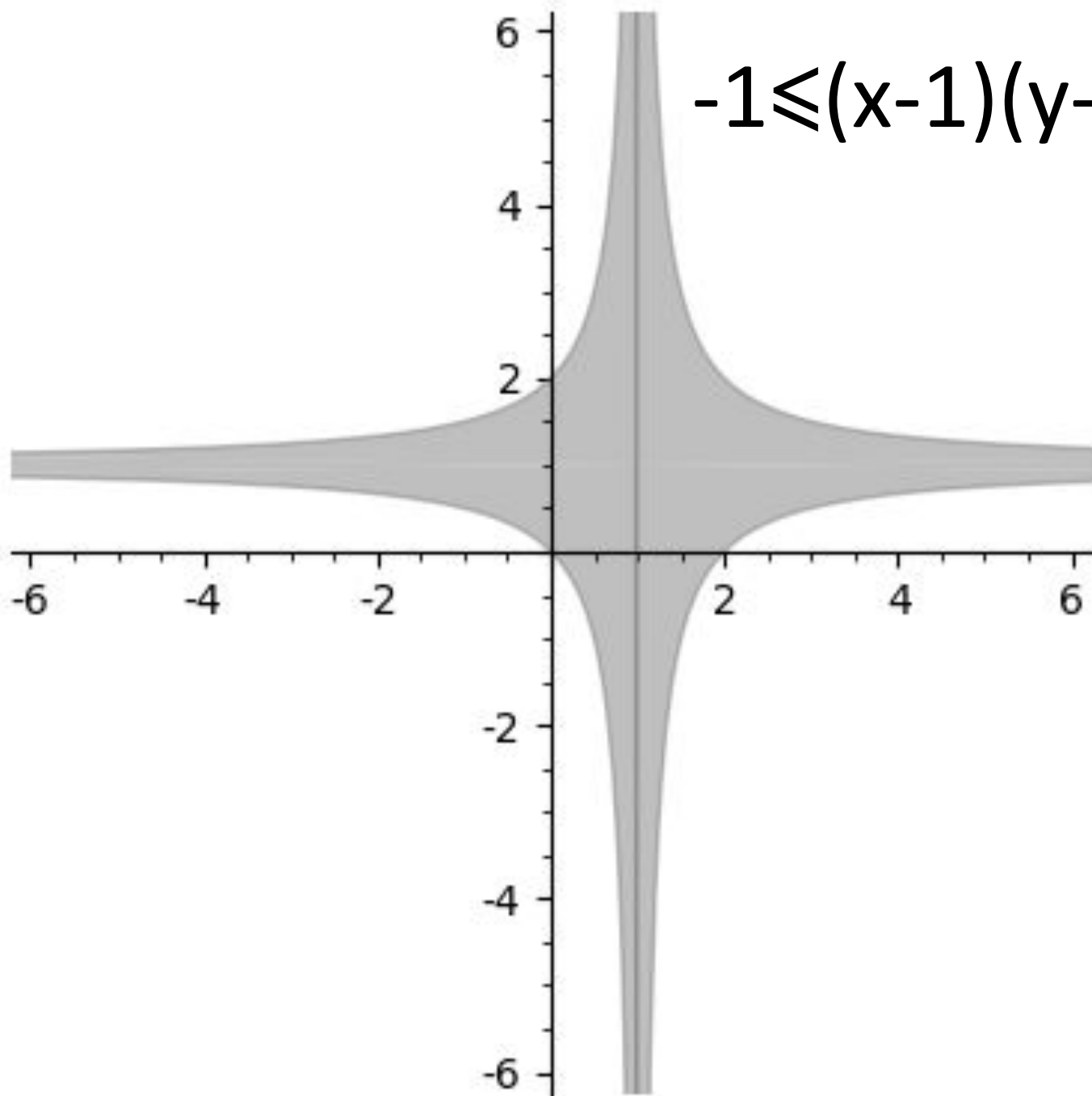


$$xy=1$$

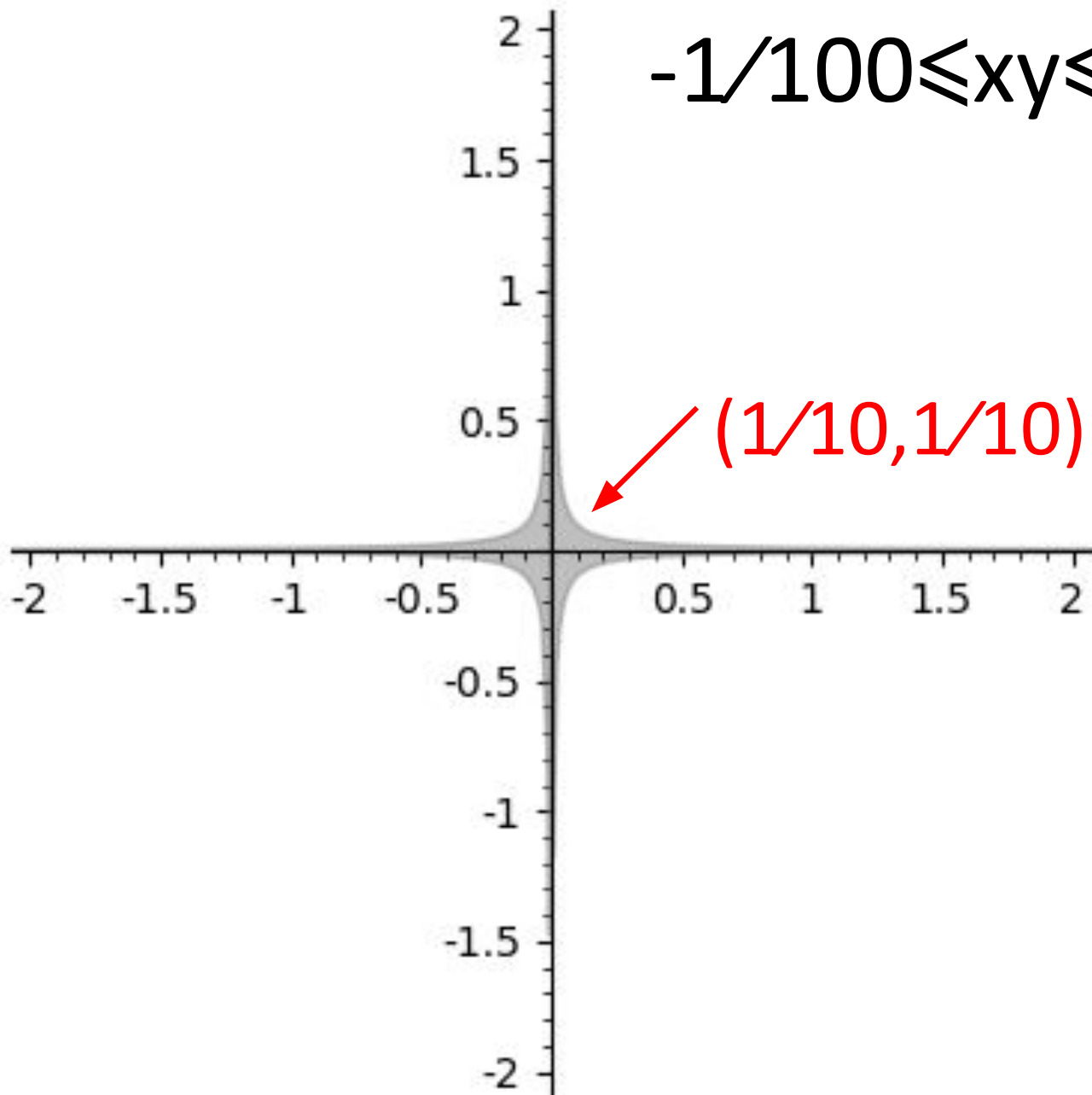
$$-1 \leq xy \leq 1$$



$$-1 \leq (x-1)(y-1) \leq 1$$



$$-1/100 \leq xy \leq 1/100$$





ג'ון אדנזור ליטלוד

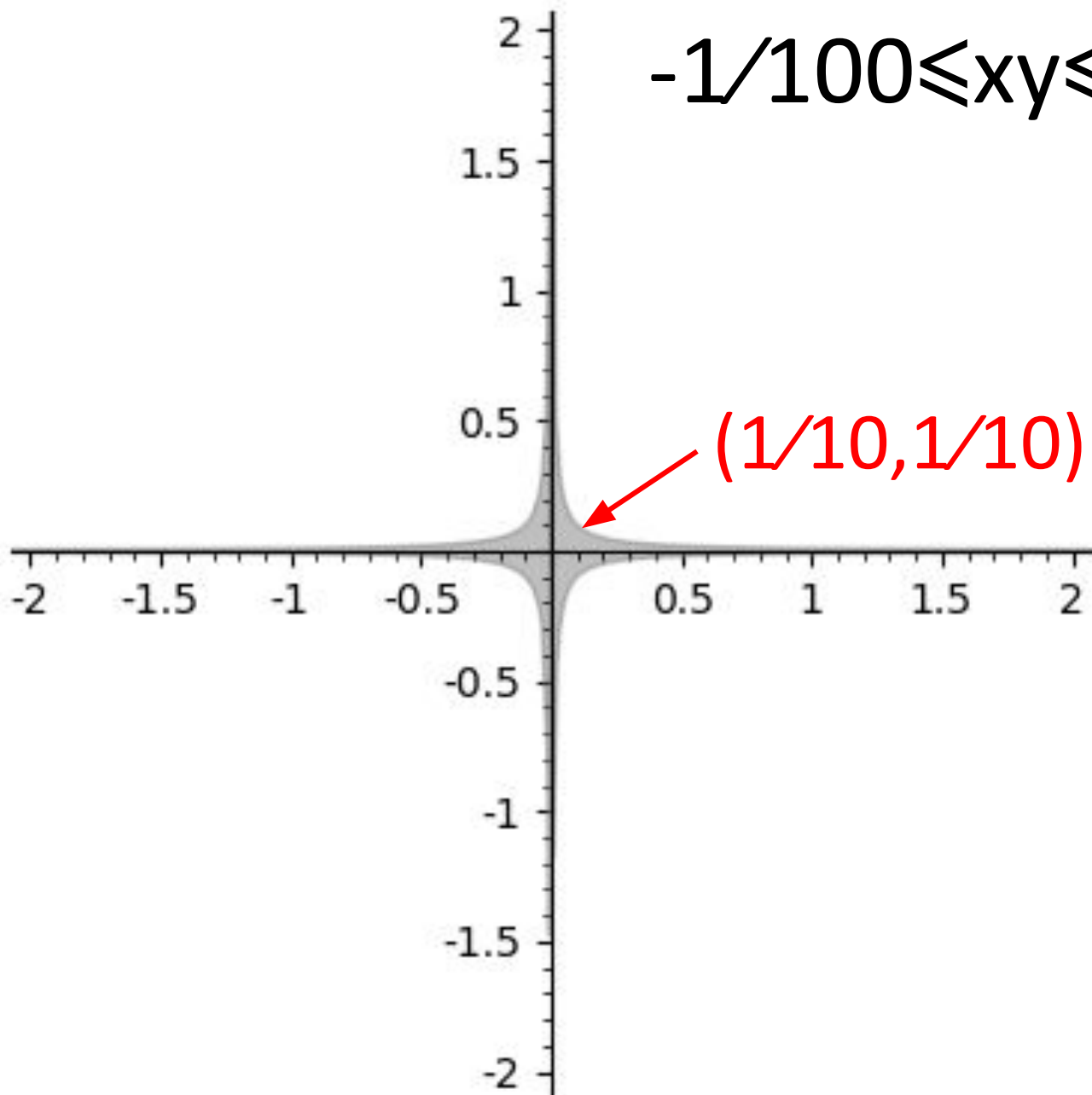
ההשערה של ליטלוד

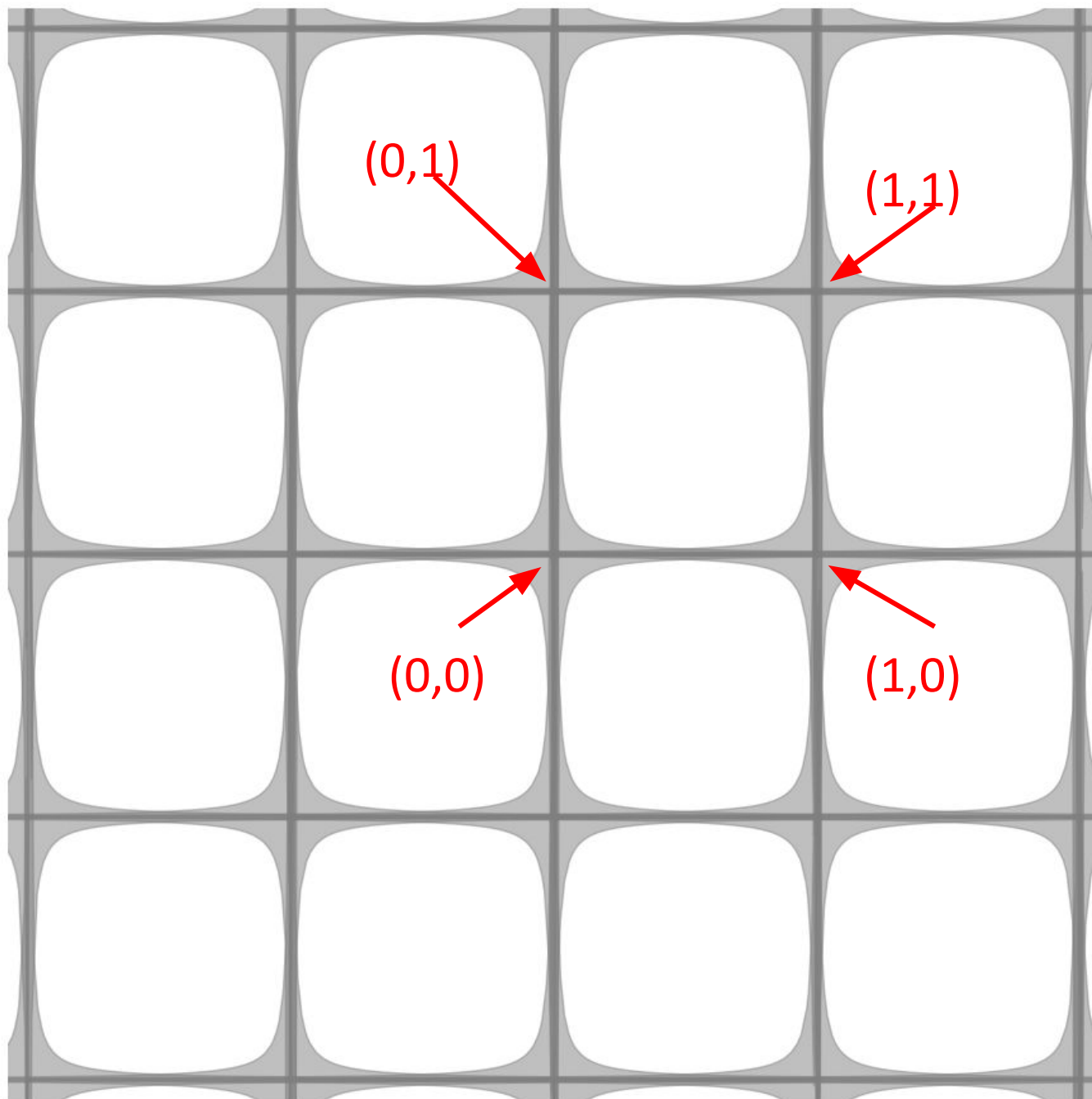
לכל היפרבולה, אוסף כל ההזזות
הרציונליות שלה, מכווצות ביחס של
המכנה בחזקת שלושה חצאים,
מכסה את המישור.

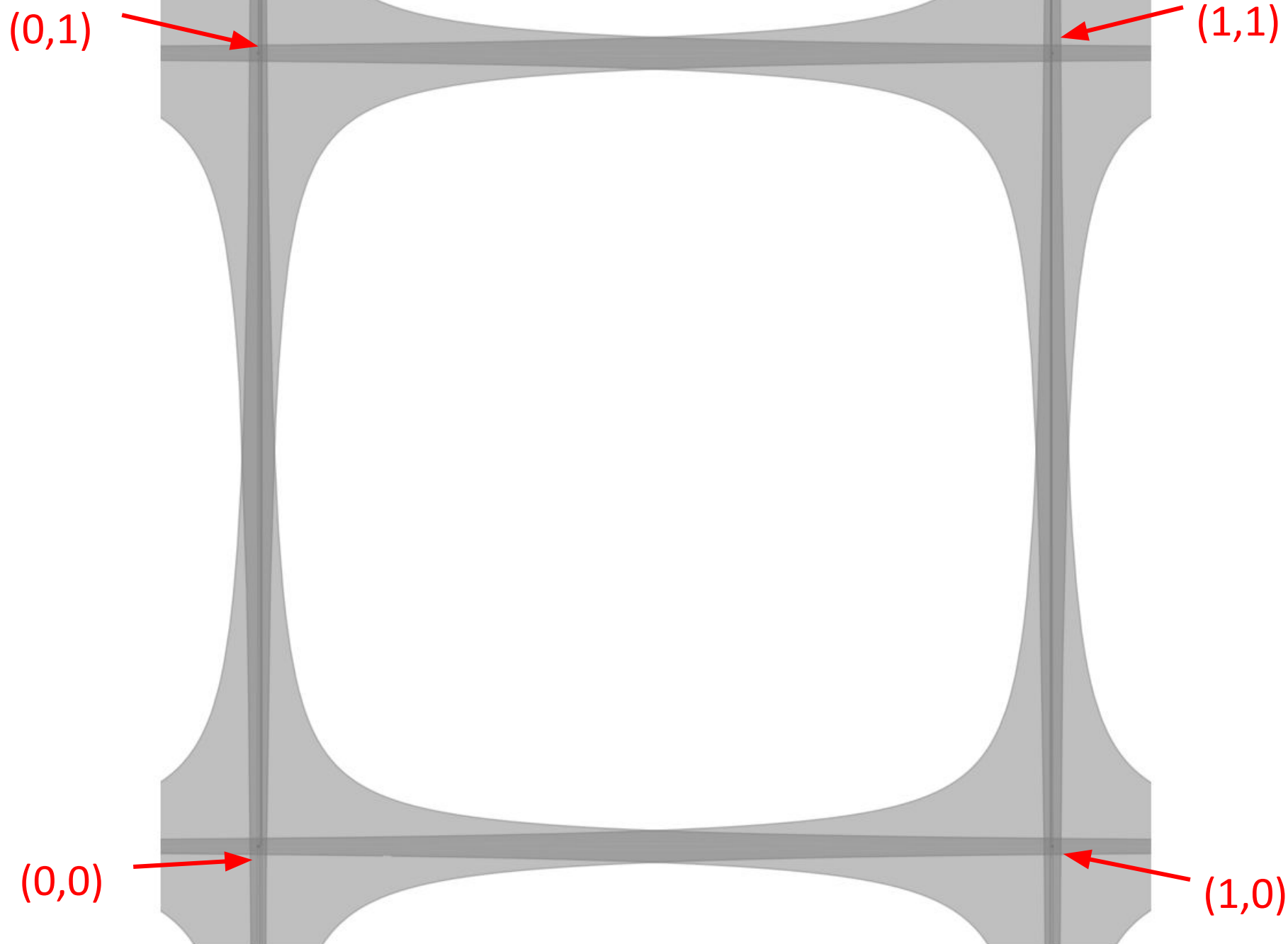
(לכל x ו y , ולכל $c > 0$, קיים מכנה n ,
ומונים m ו k , שמקיימים

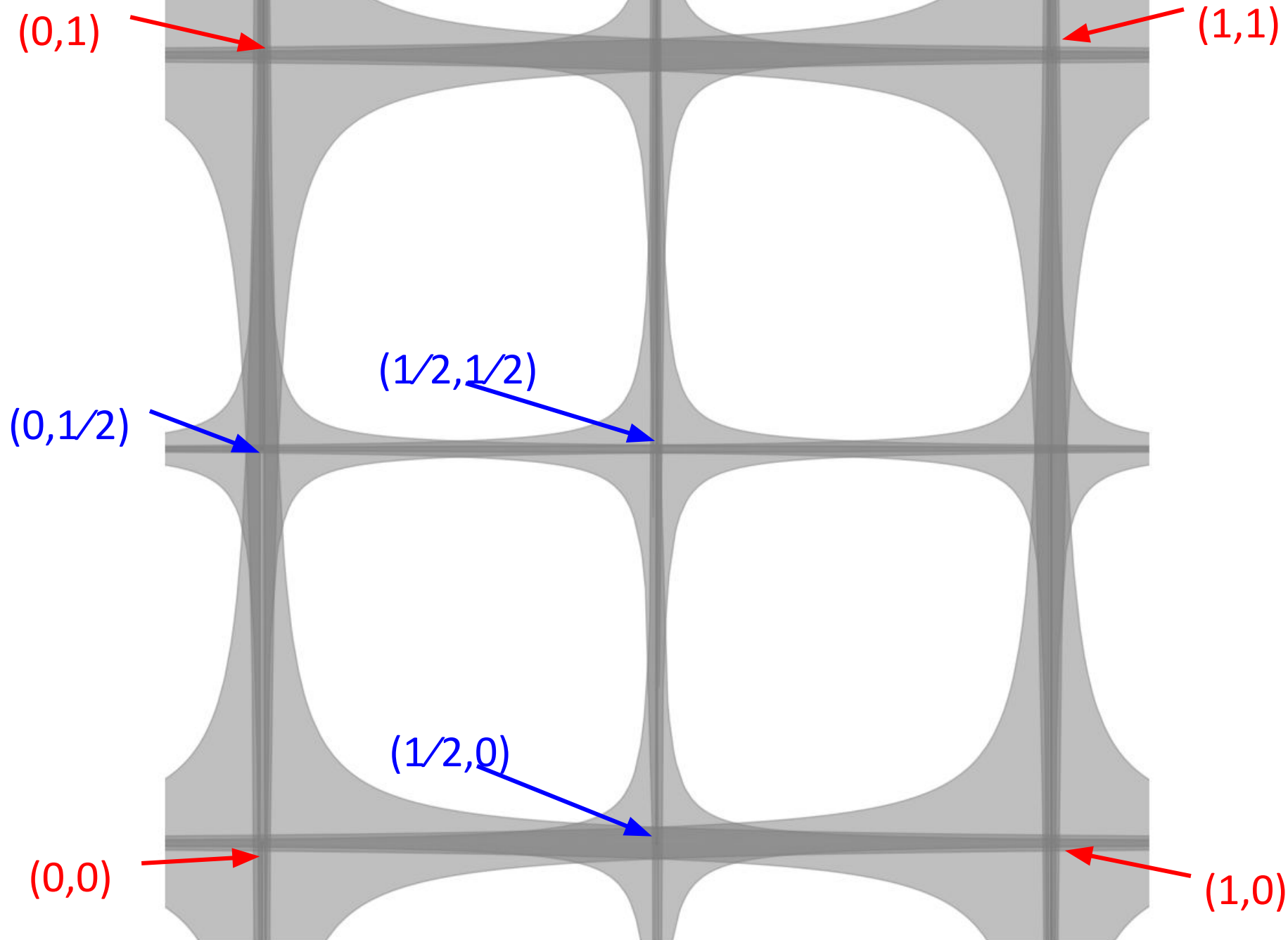
$$(|x - m/n| |y - k/n| < c/n^3$$

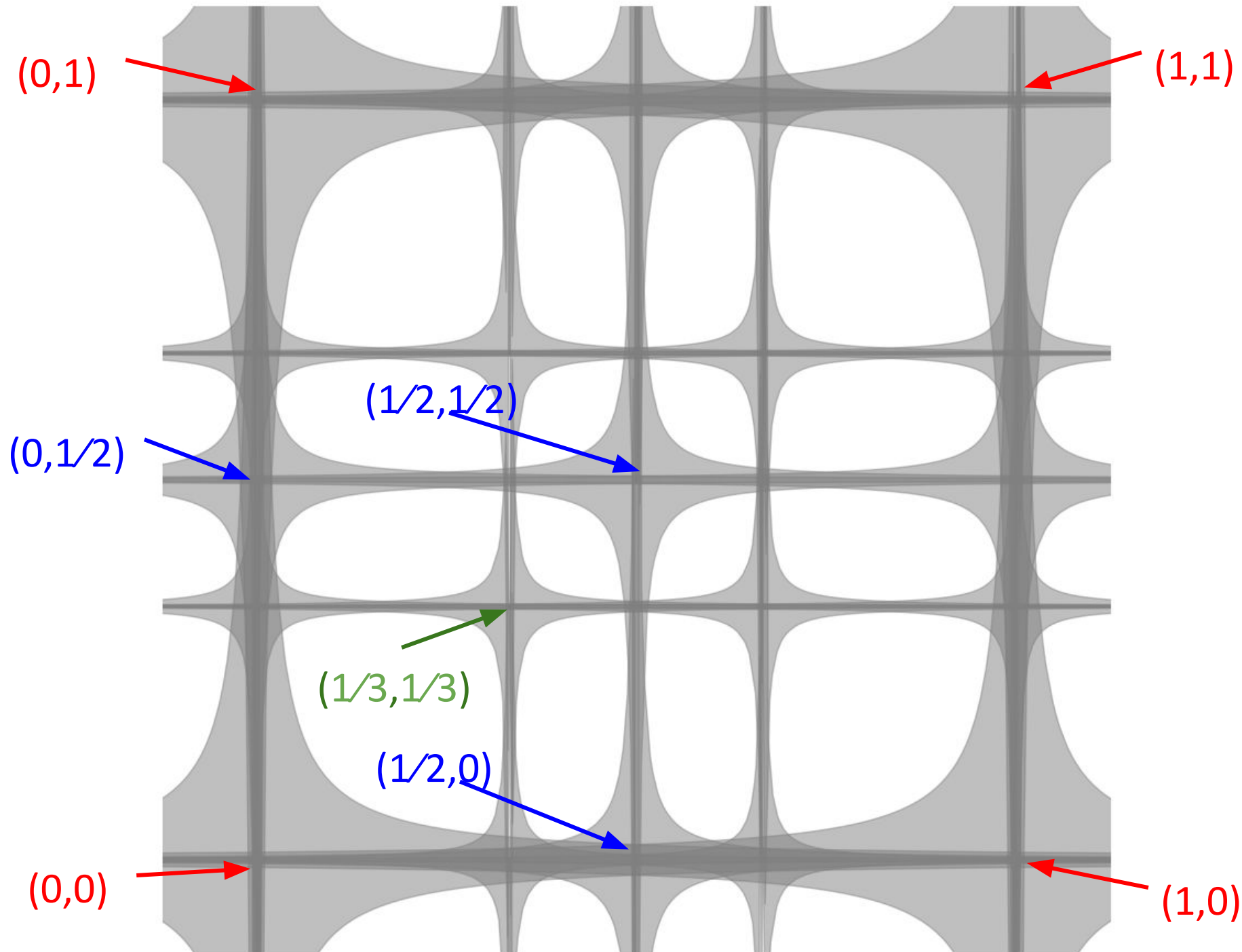
$$-1/100 \leq xy \leq 1/100$$



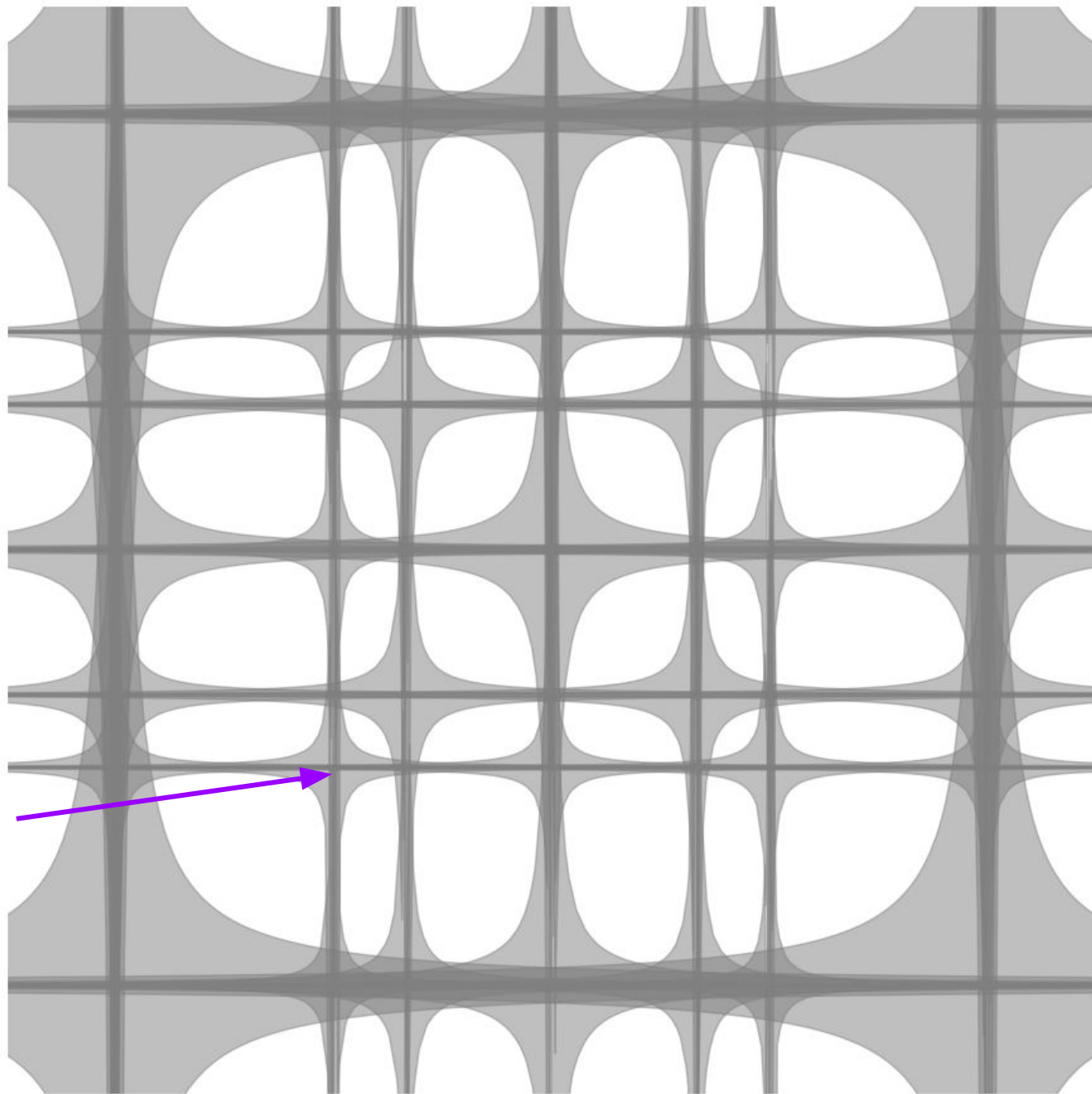


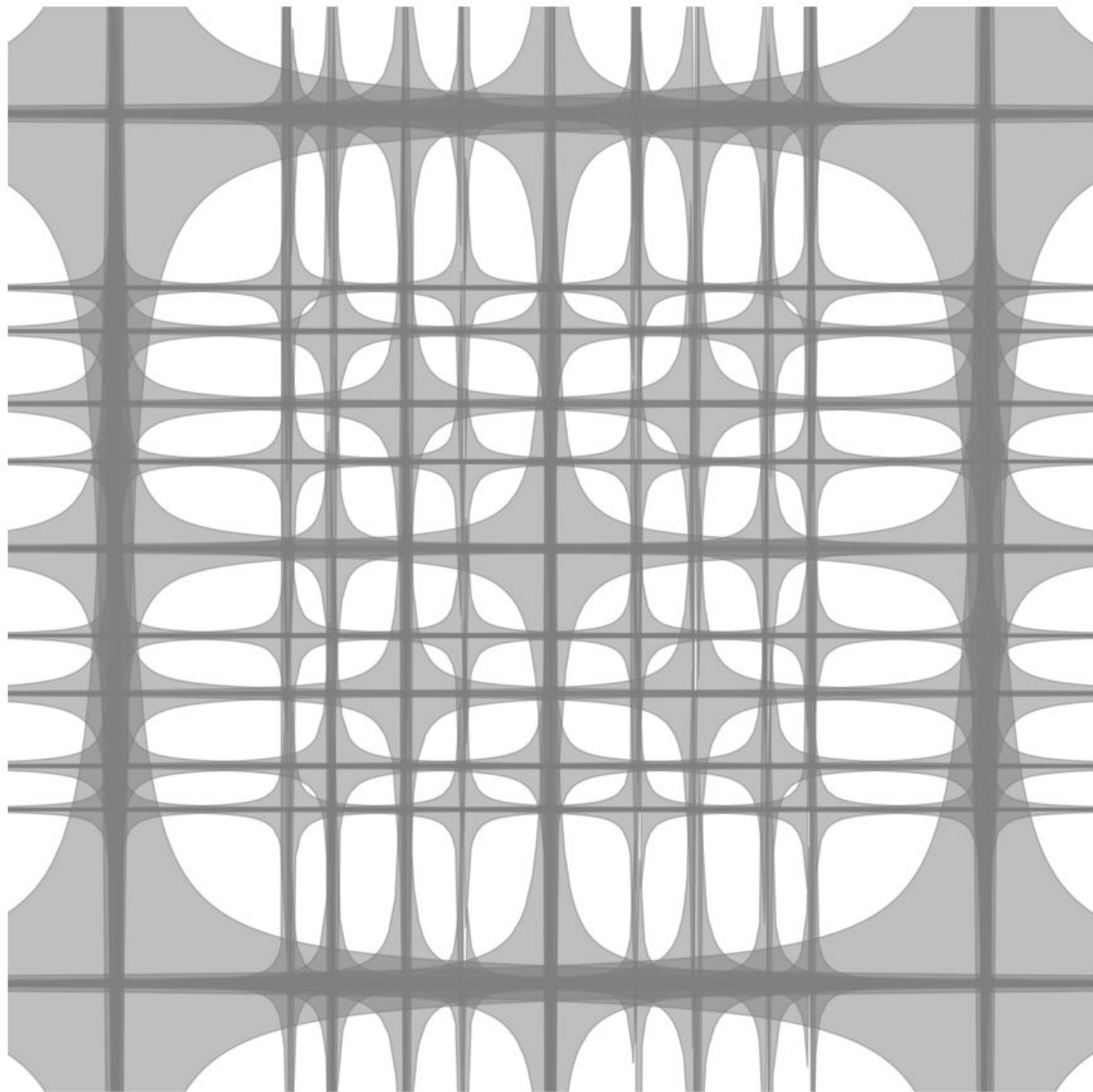


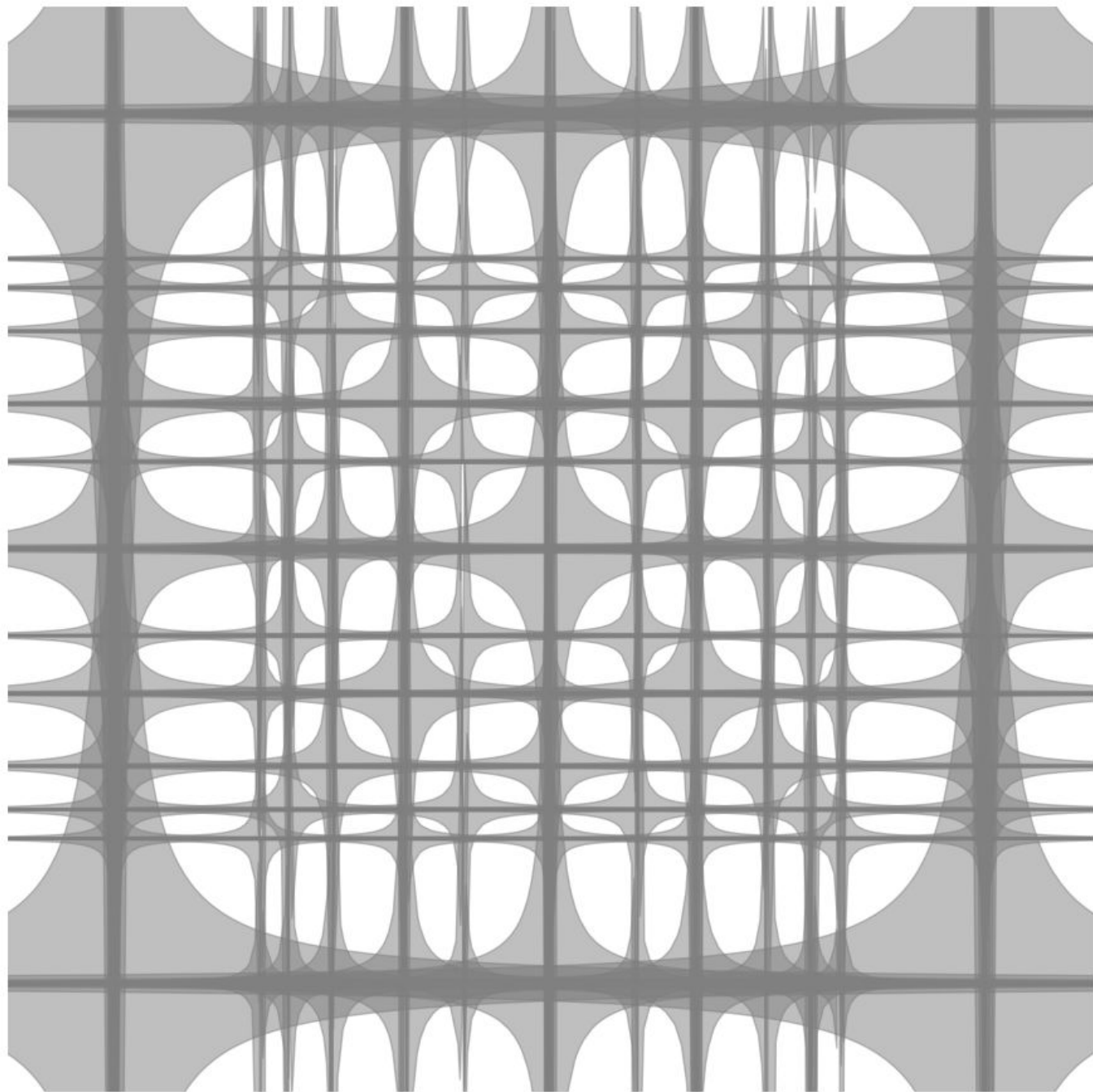


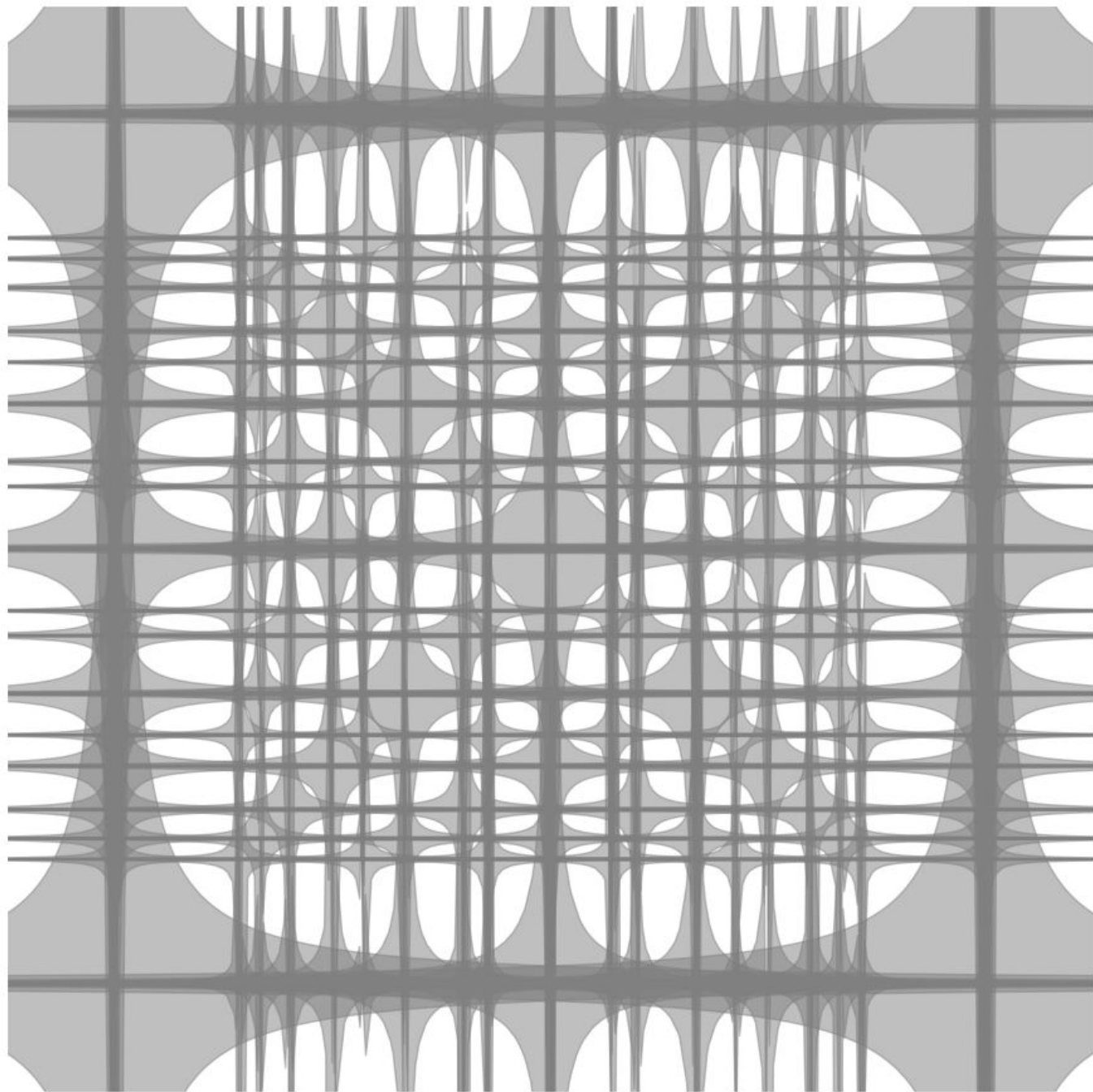


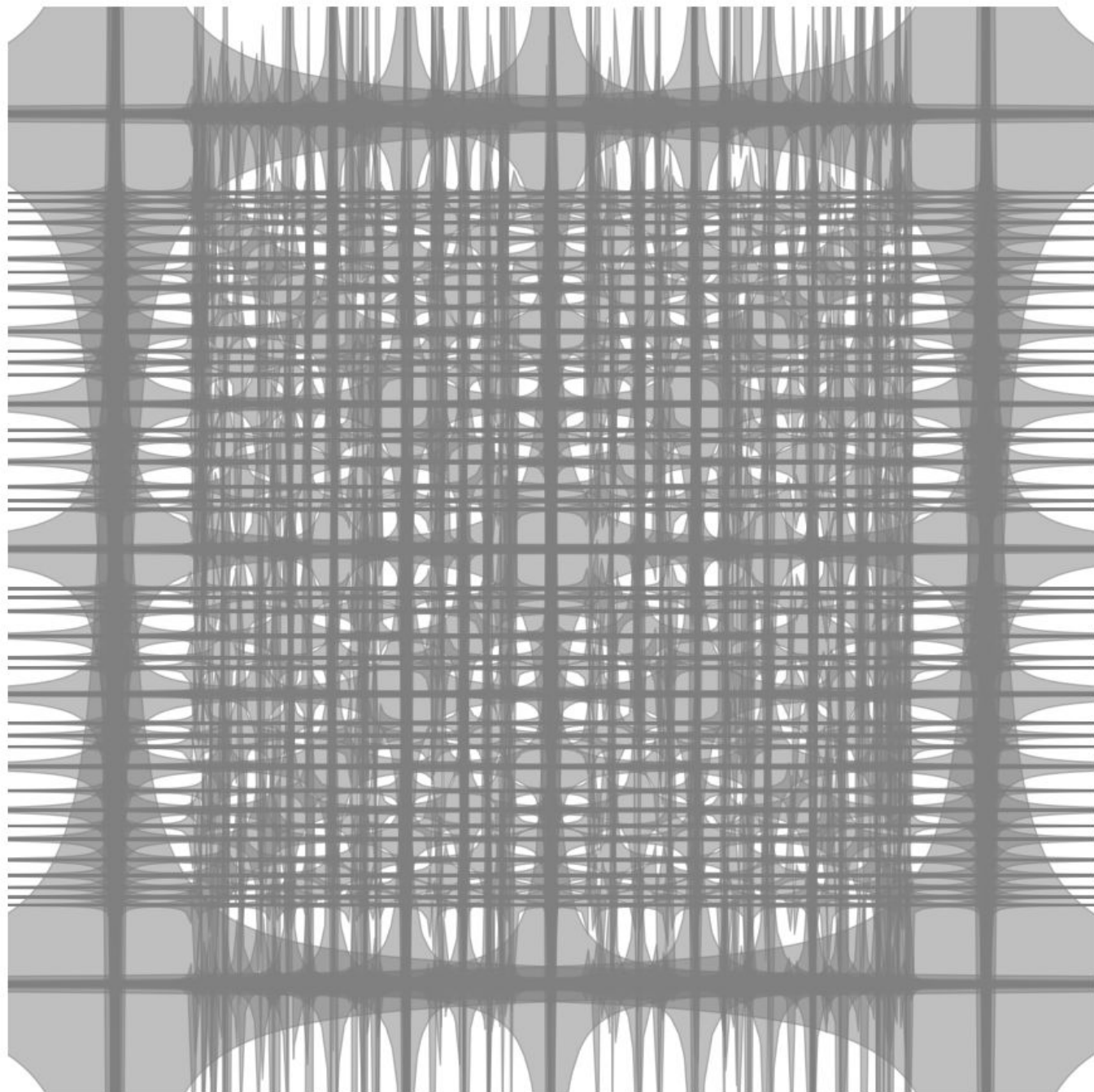
$(1/4, 1/4)$

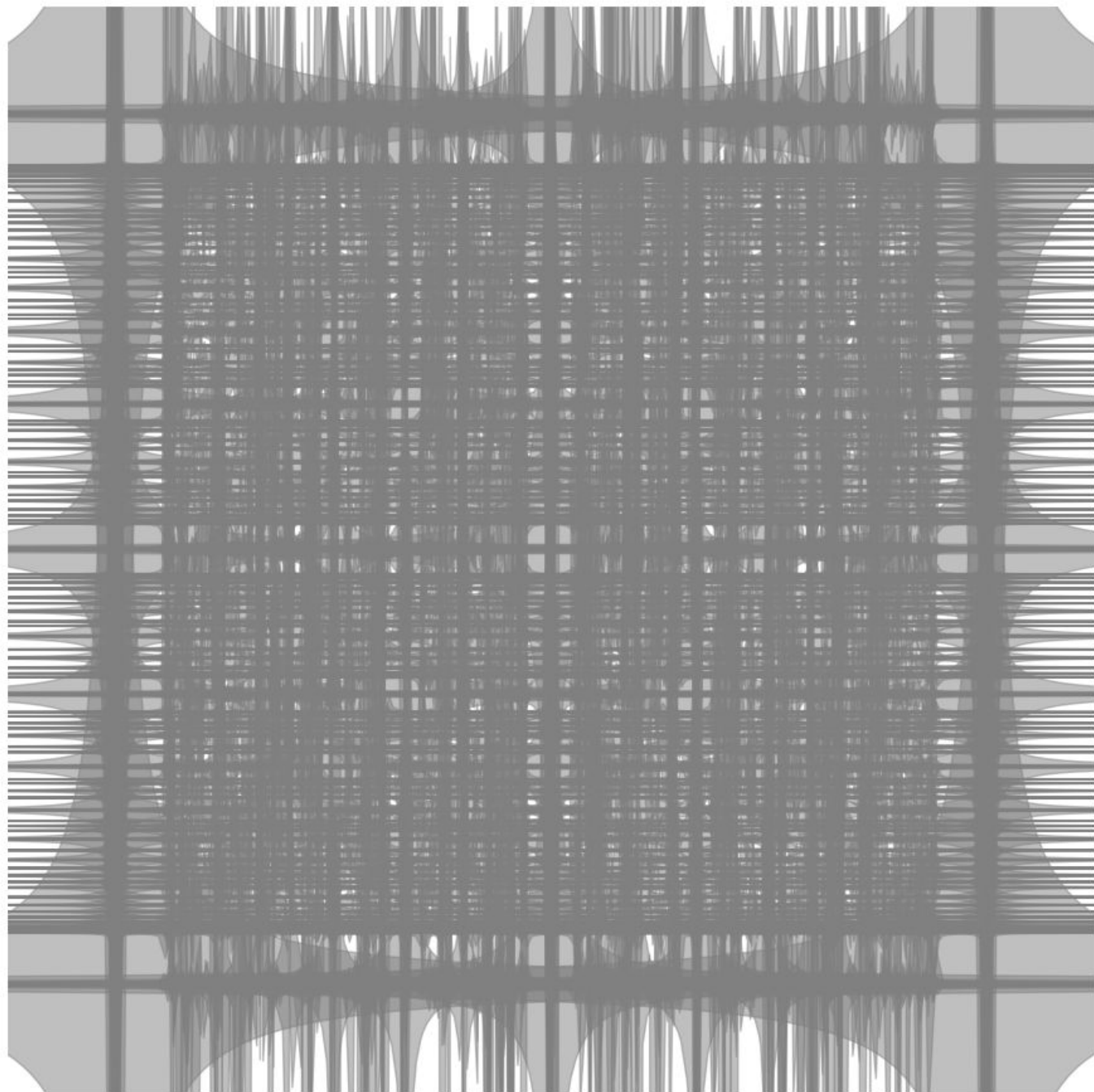






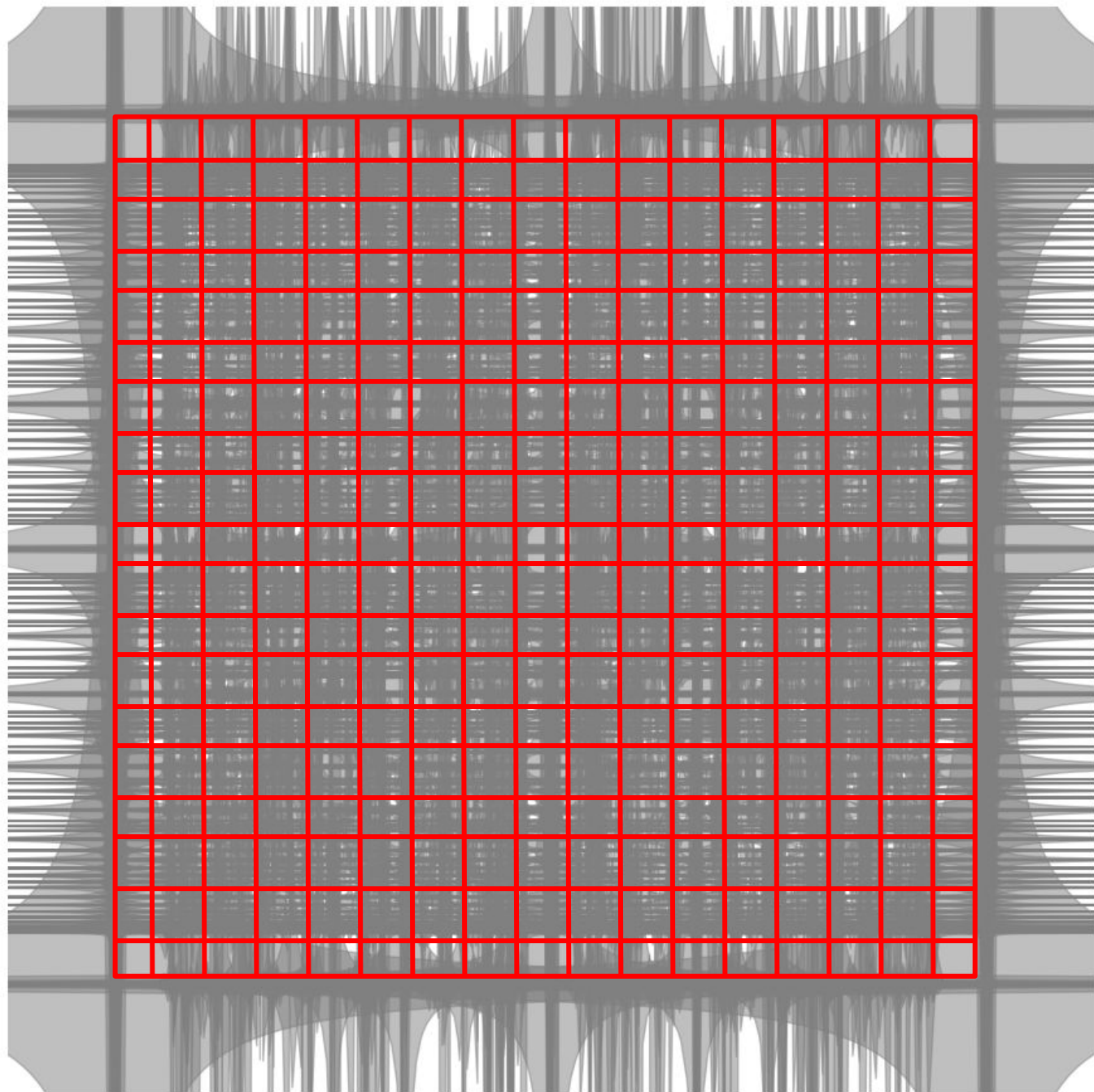


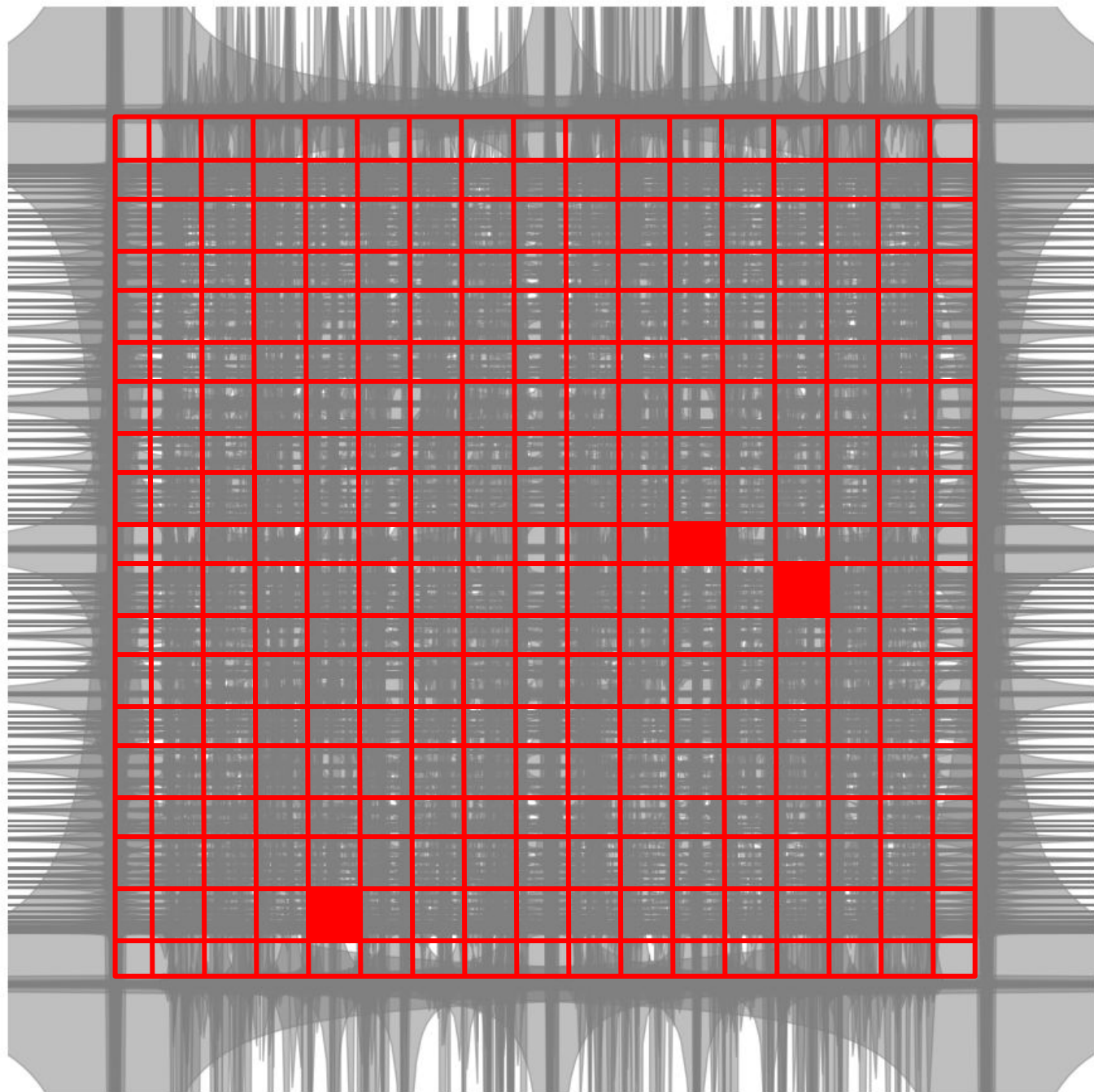






אילון לינדנשטראוס



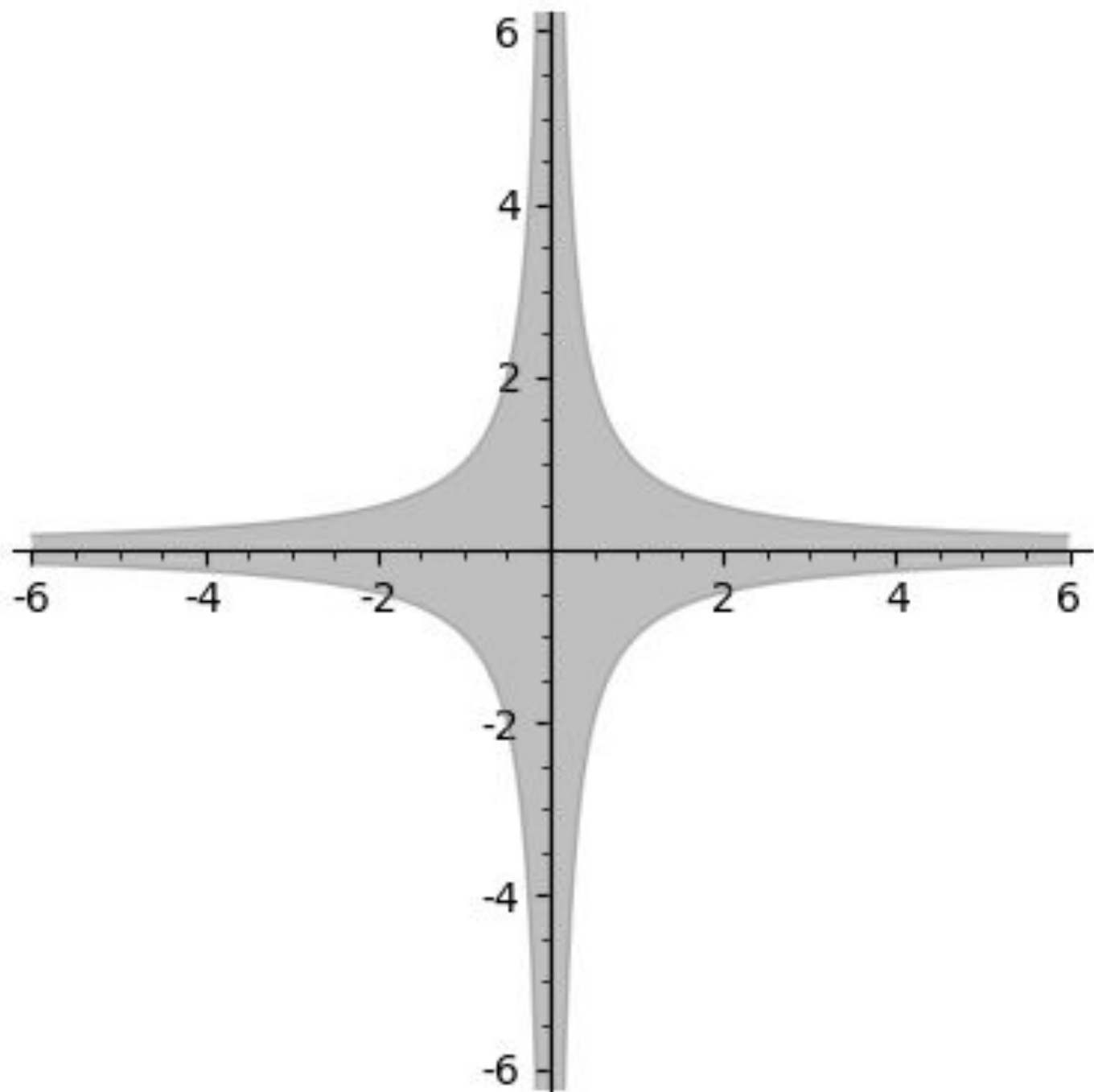


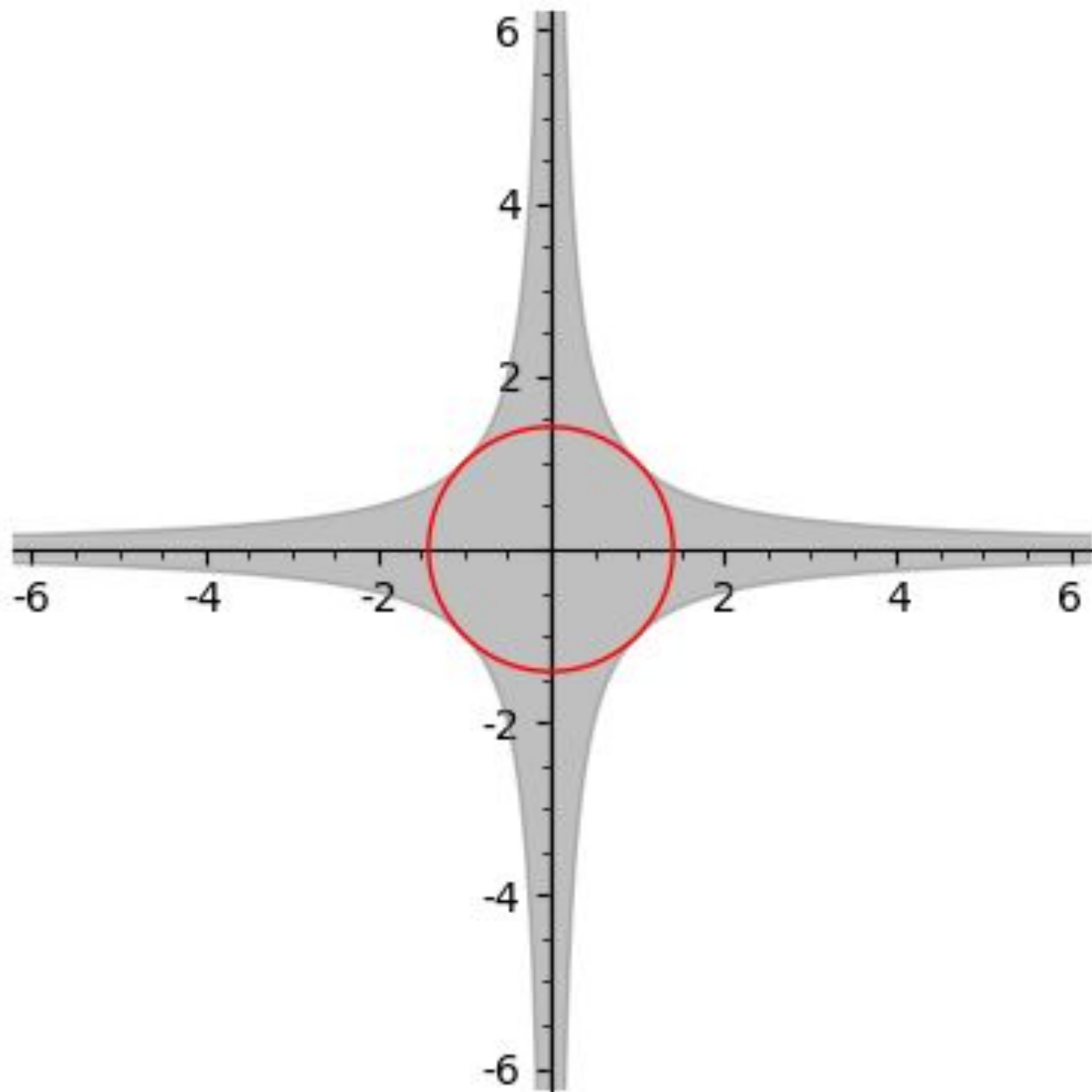
השערת ליטלוד עדיין פתוחה. אבל אנחנו יודעים שאין לה הרבה דוגמאות נגדיות:

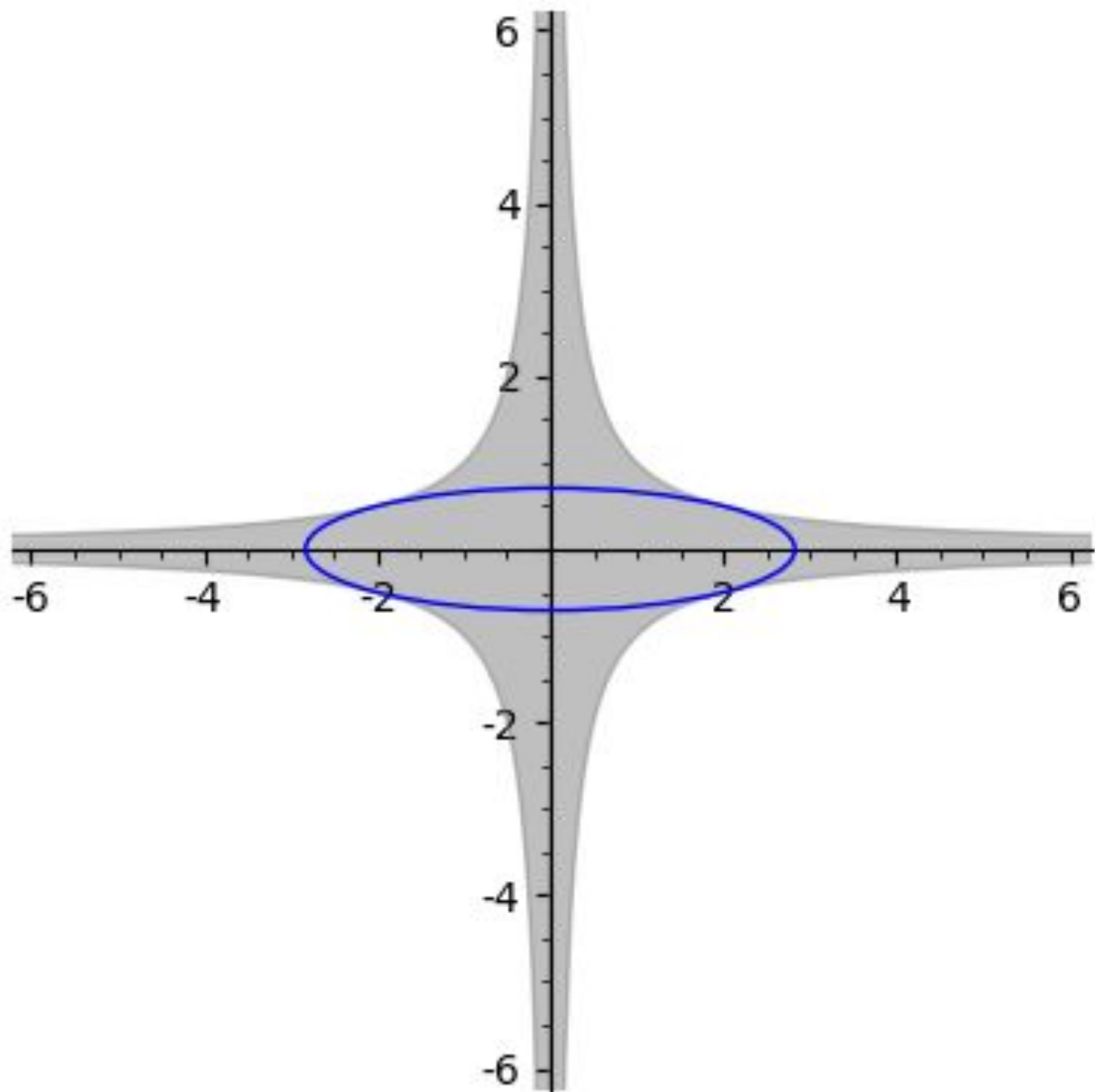
לכל n (מספיק גדול), לכל $a > 0$, ולכל
היפרבולה התחלתית, כל הנקודות
בריבוע היחידה מכוסות על ידי כל ההזזות
הרציונליות המכוזות שלה ומספר קטן
(n^a) של ריבועים בגודל
 $1/n \times 1/n$

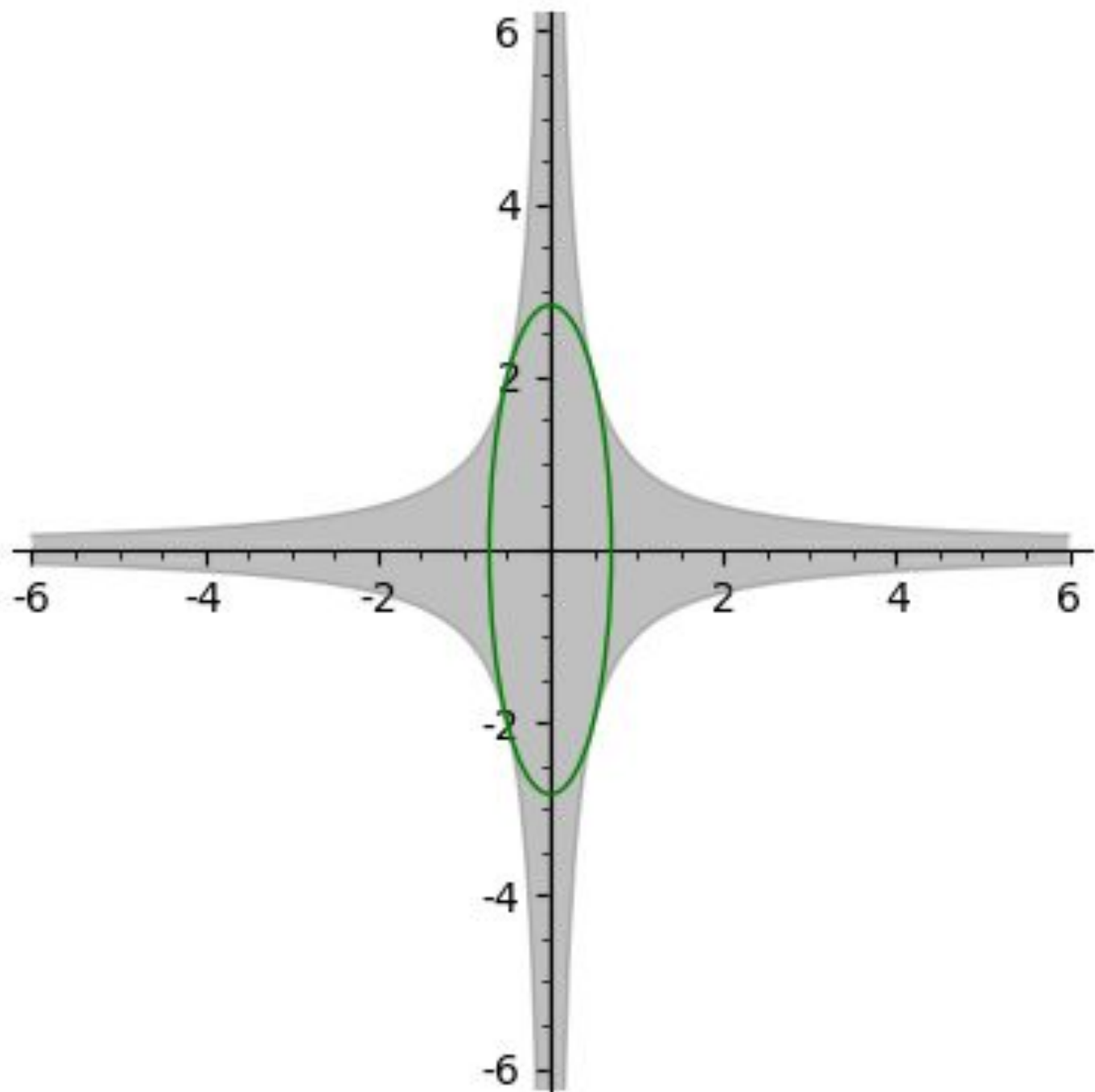


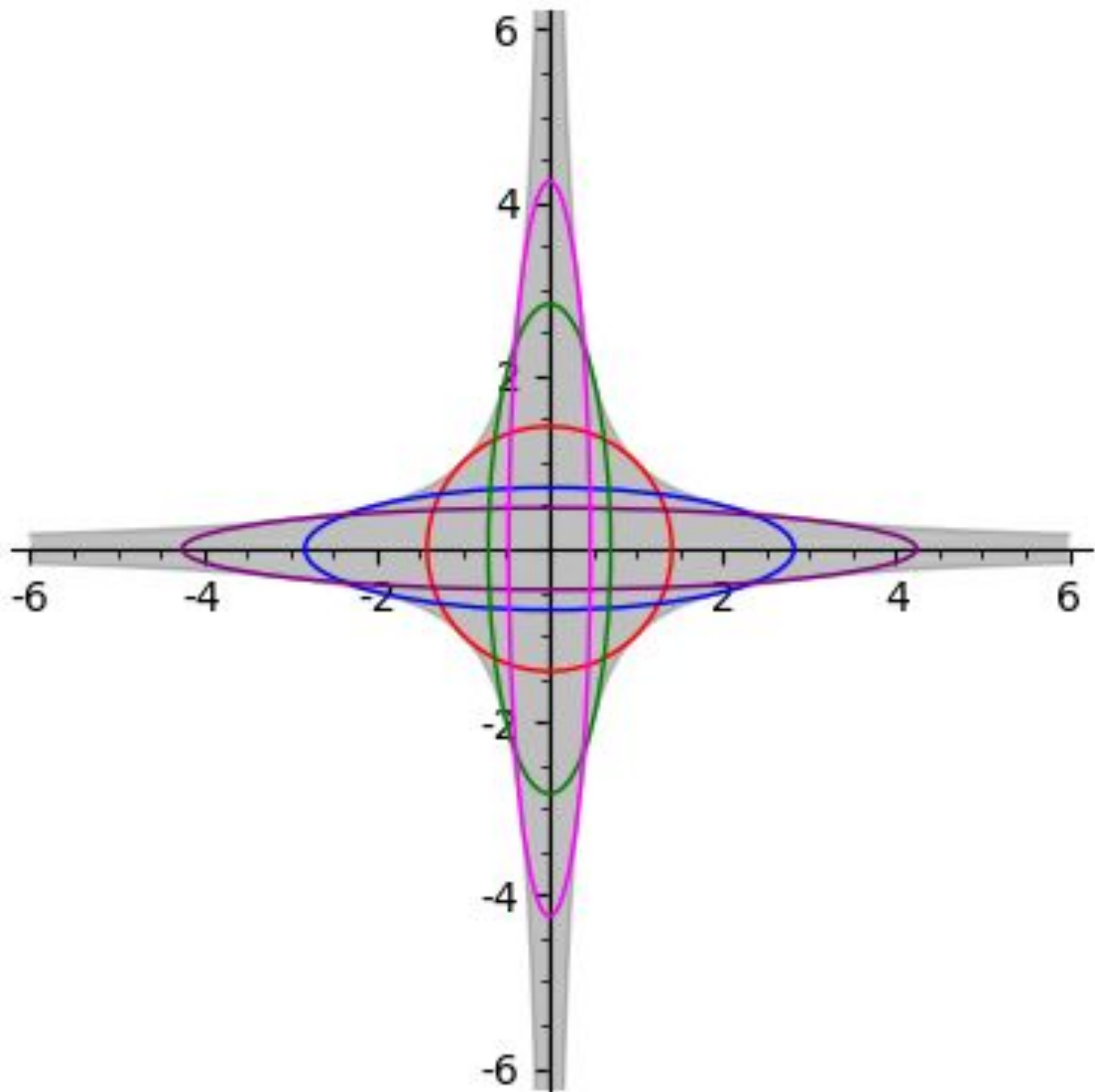
וולפגנג מ. שמידט





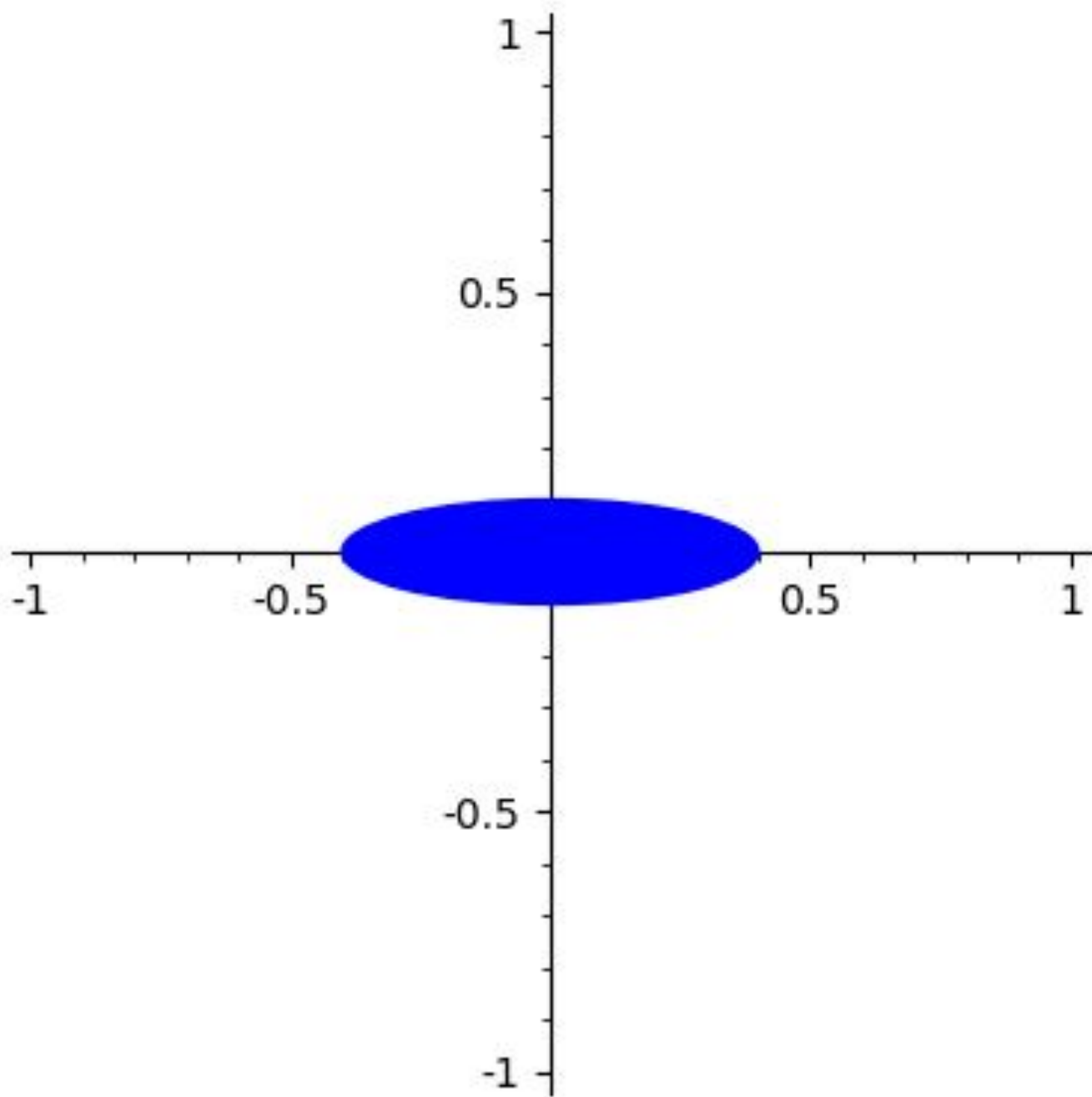


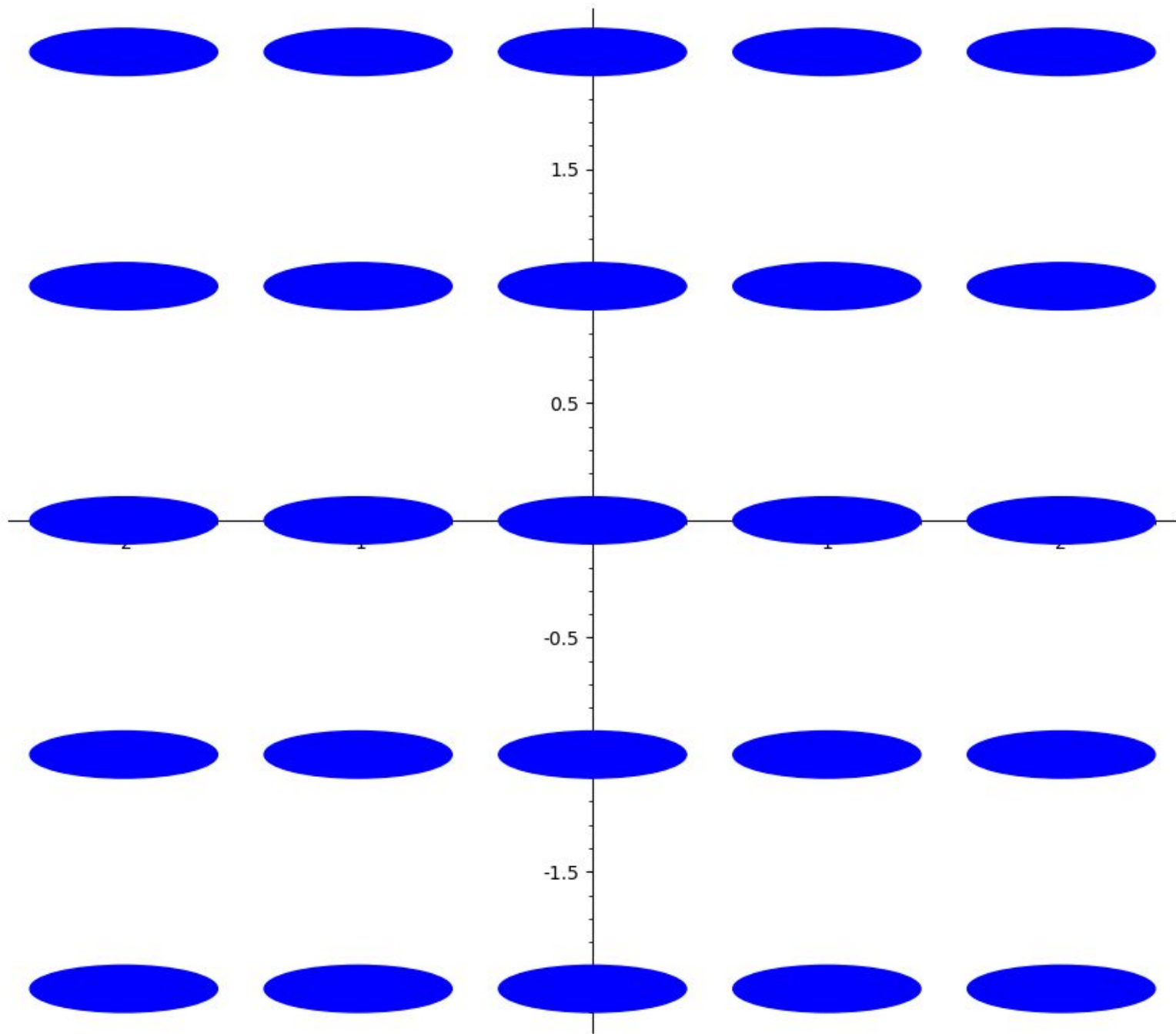


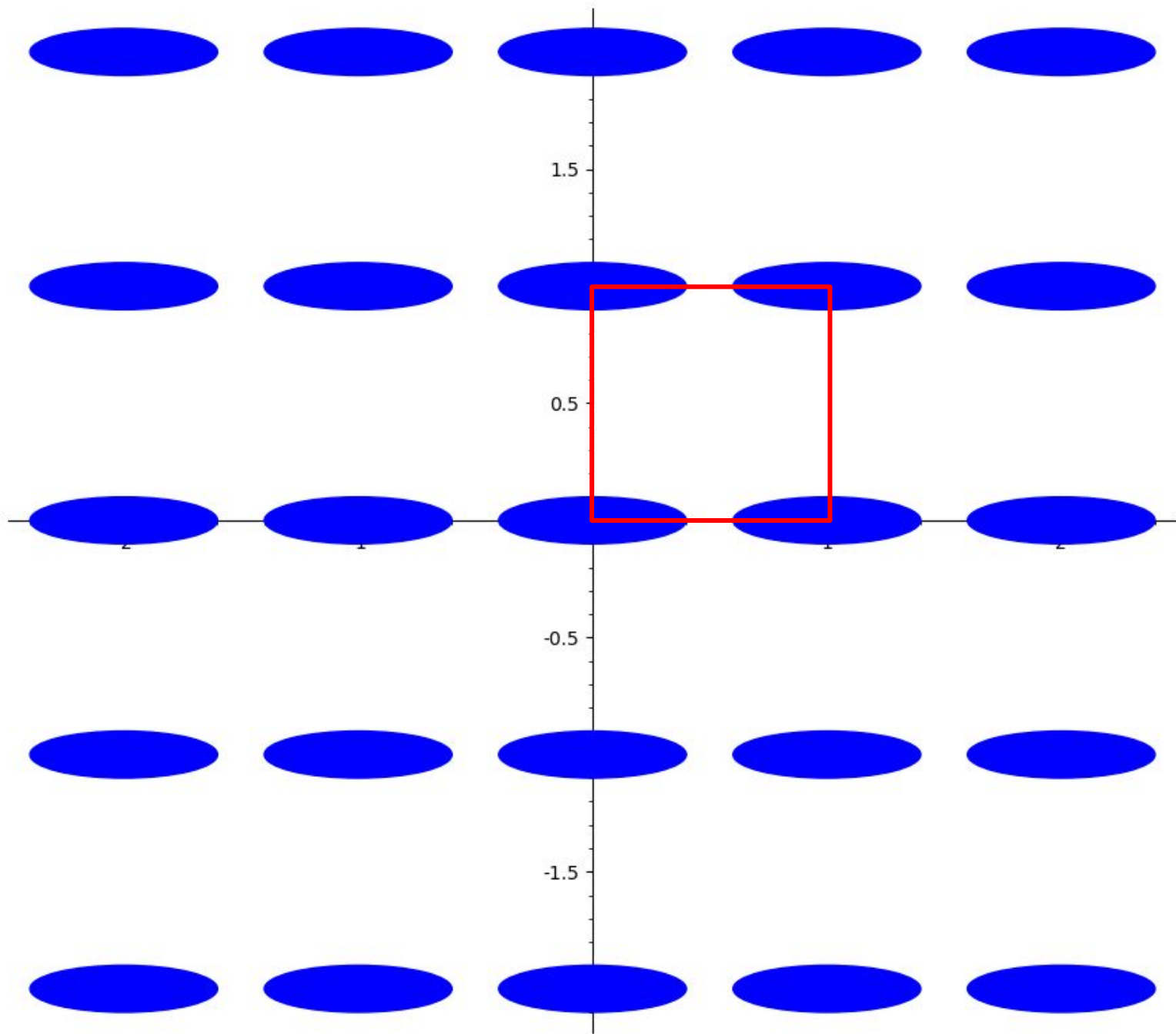


הרעיון של שמידט

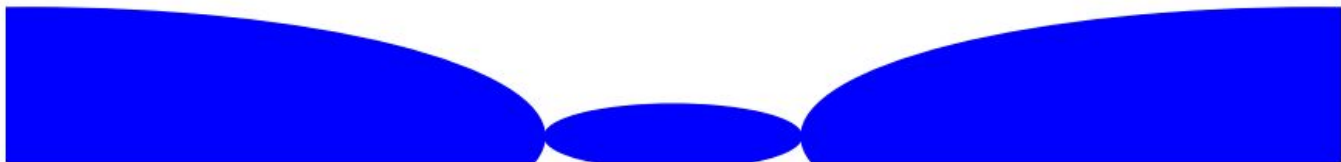
במקום כל ההזזות של היפרבולה אחת,
אפשר לחשוב על כל ההזזות של כל
האליפסות שהיא מכילה.



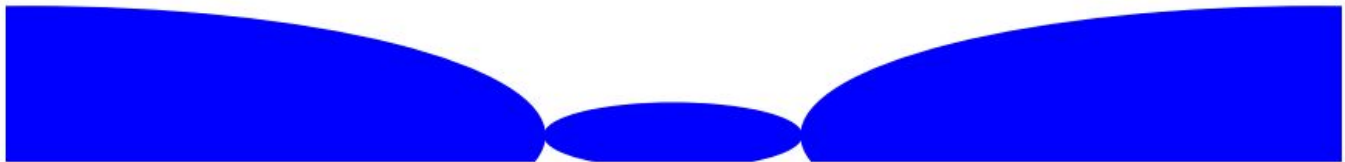


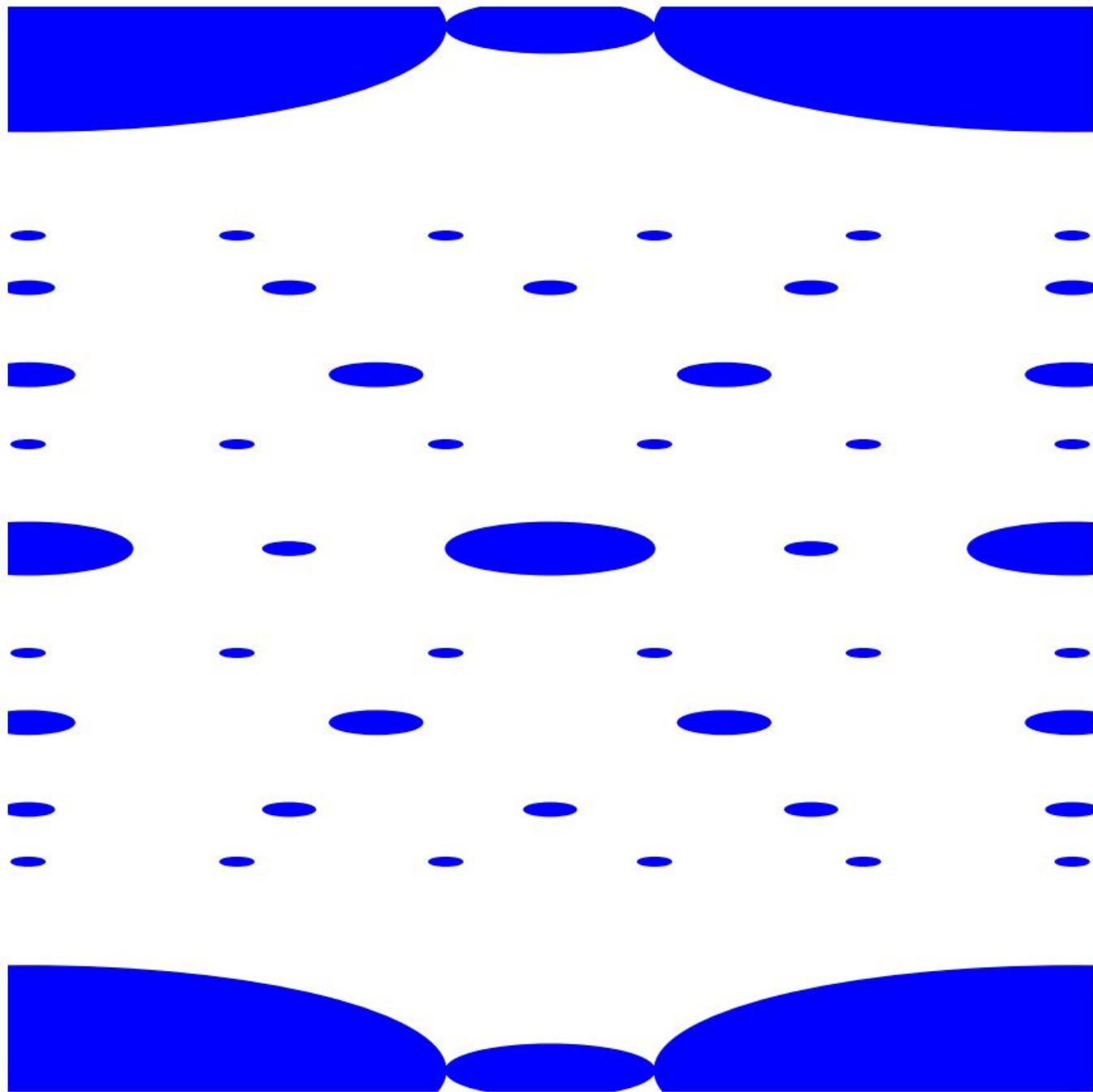


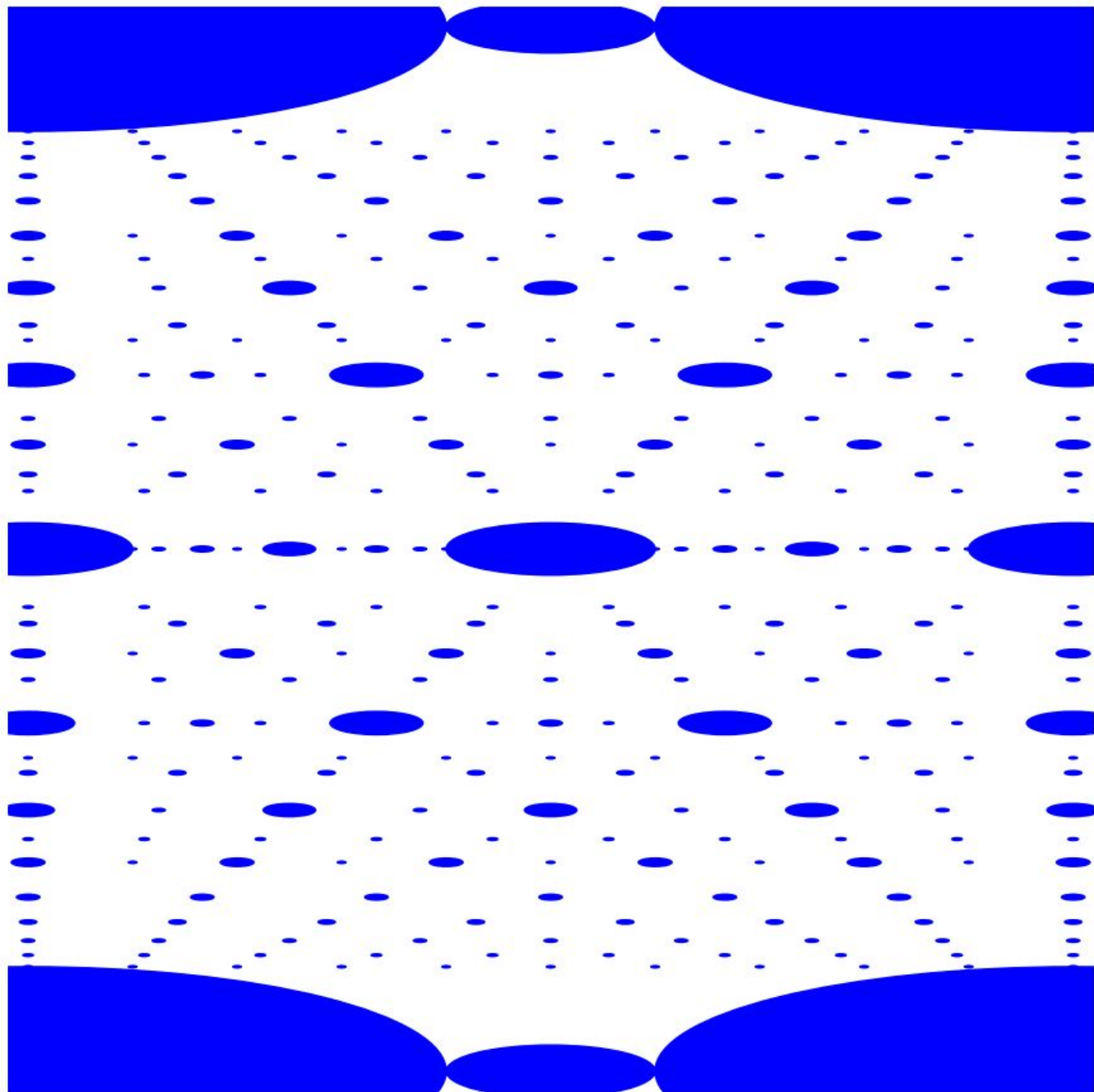


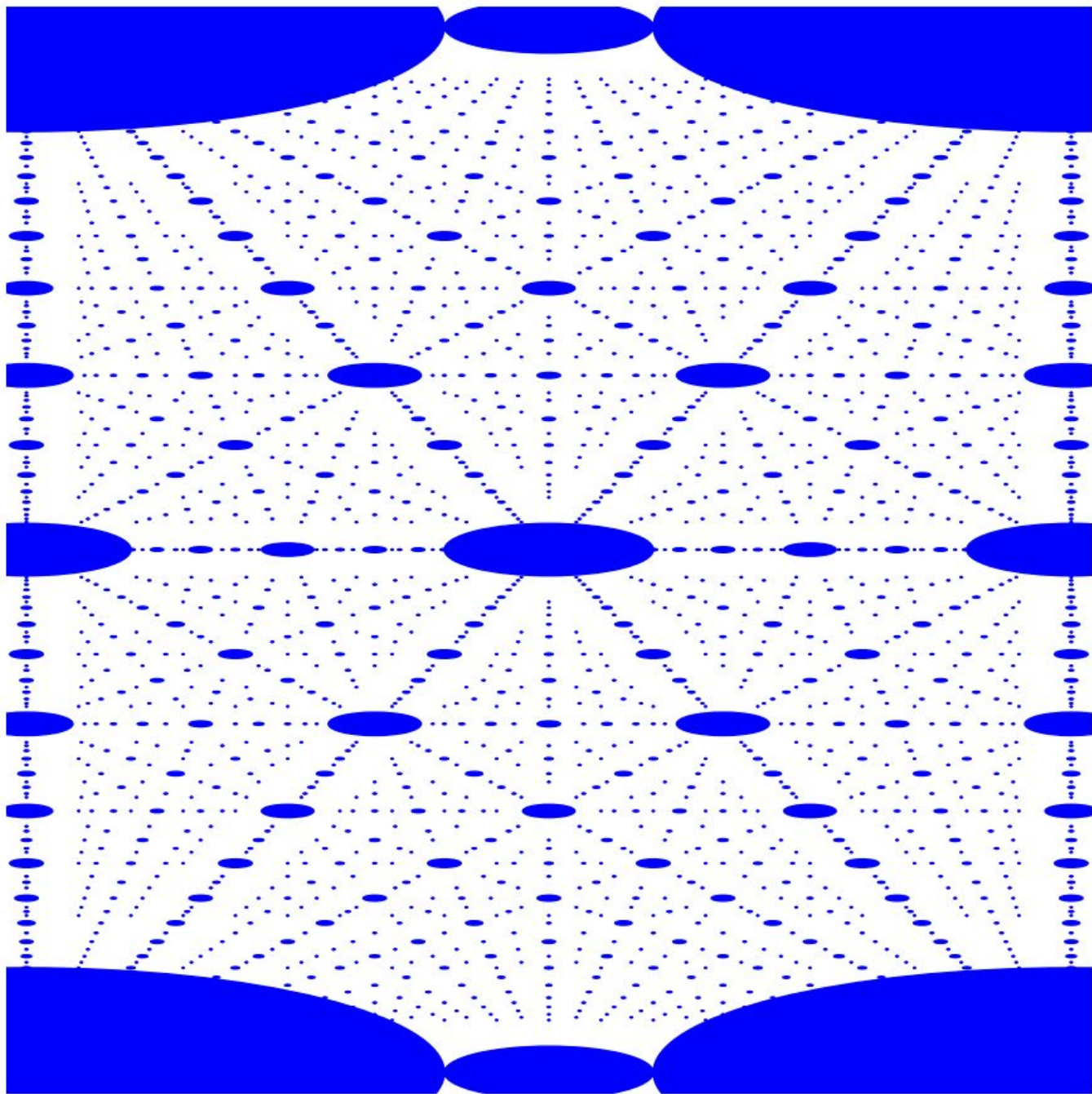


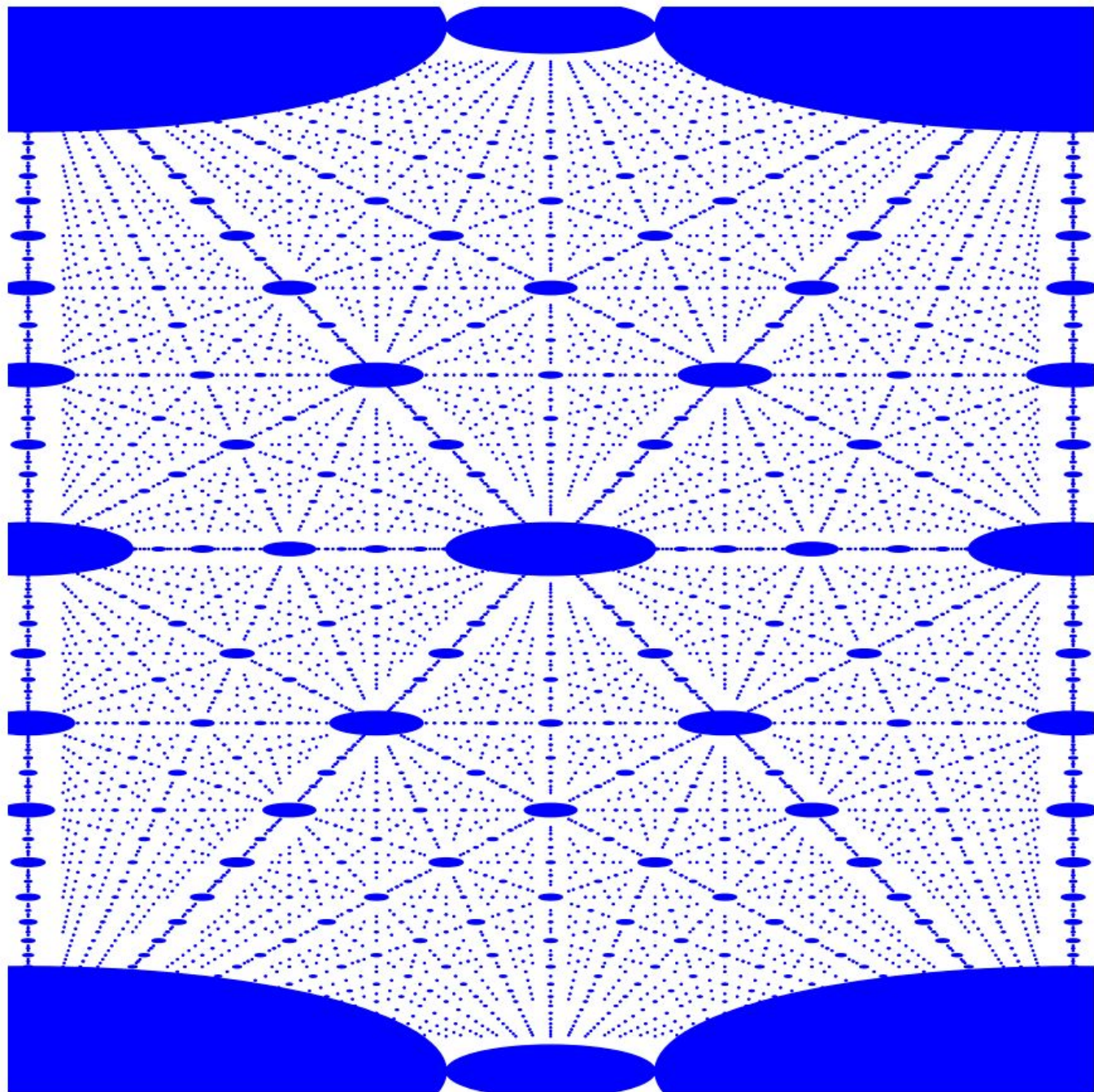












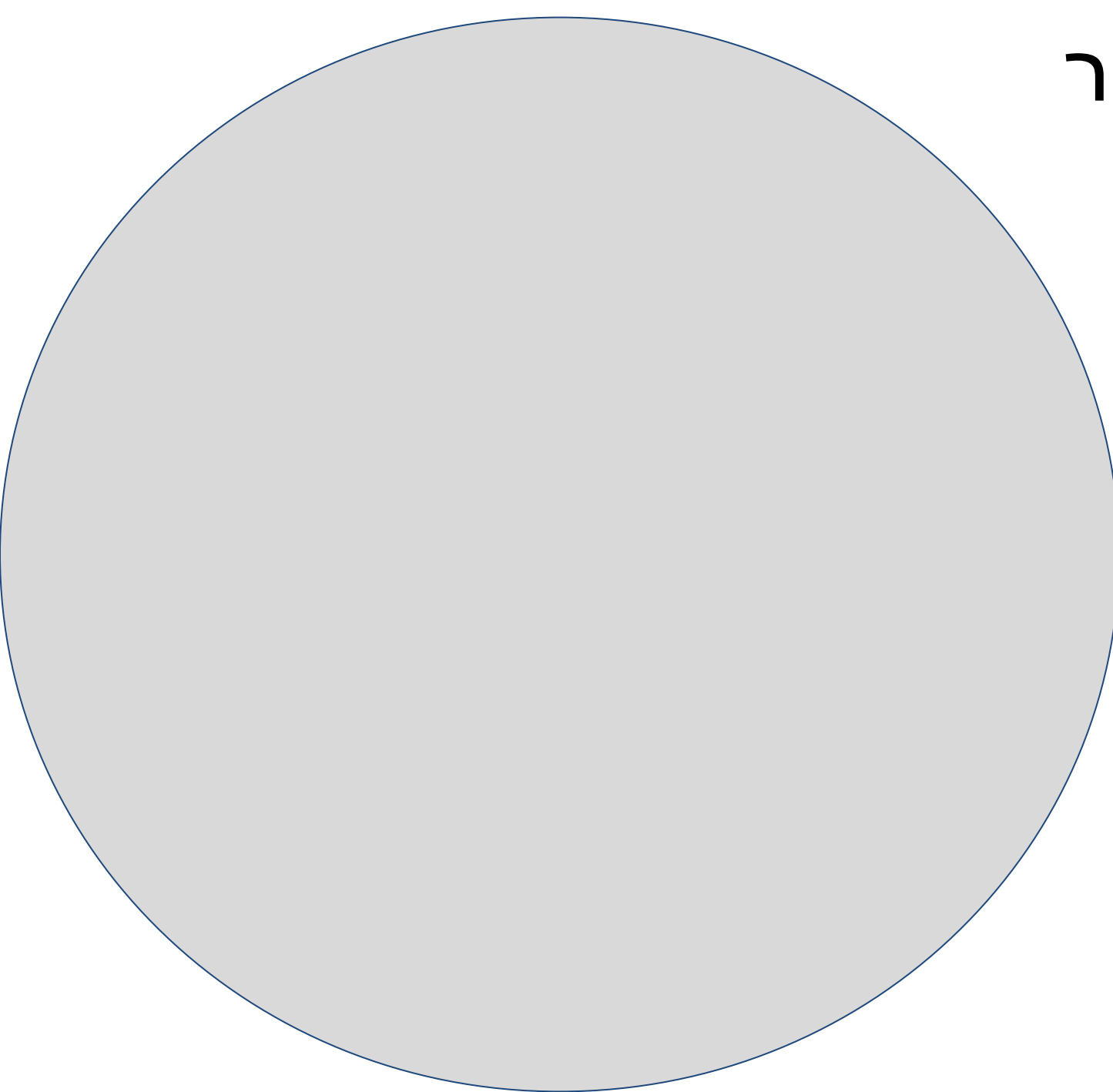
הרעיון של שמידט מנוסח הפוך

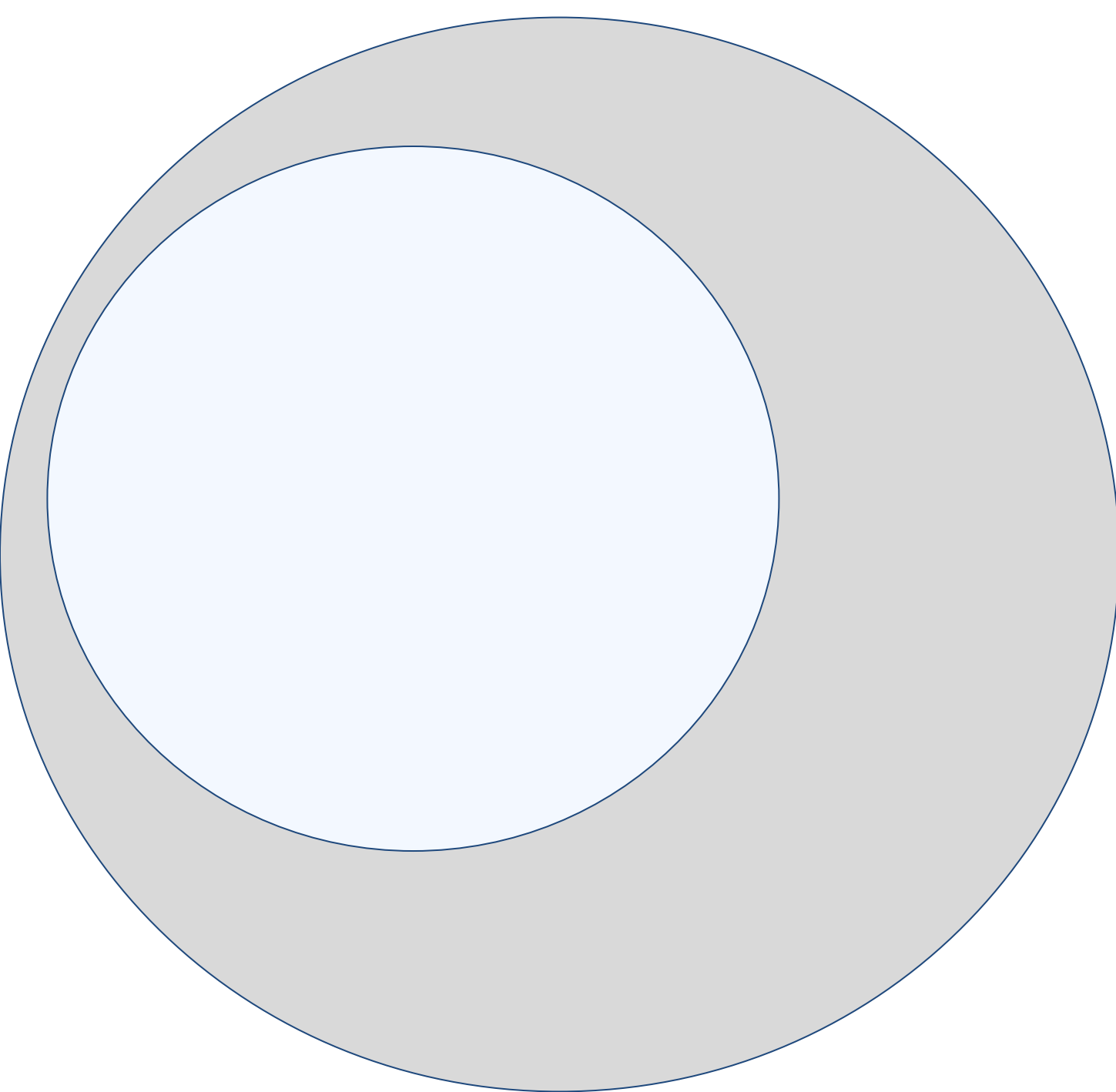
במקום להתחמק מהזזות מכווצות של
היפרבולה, האם אפשר להתחמק
מהזזות מכווצות של כל אליפסה בנפרד,
ואז להתחמק מכולן סימולטנית?

המשחק של שמידט

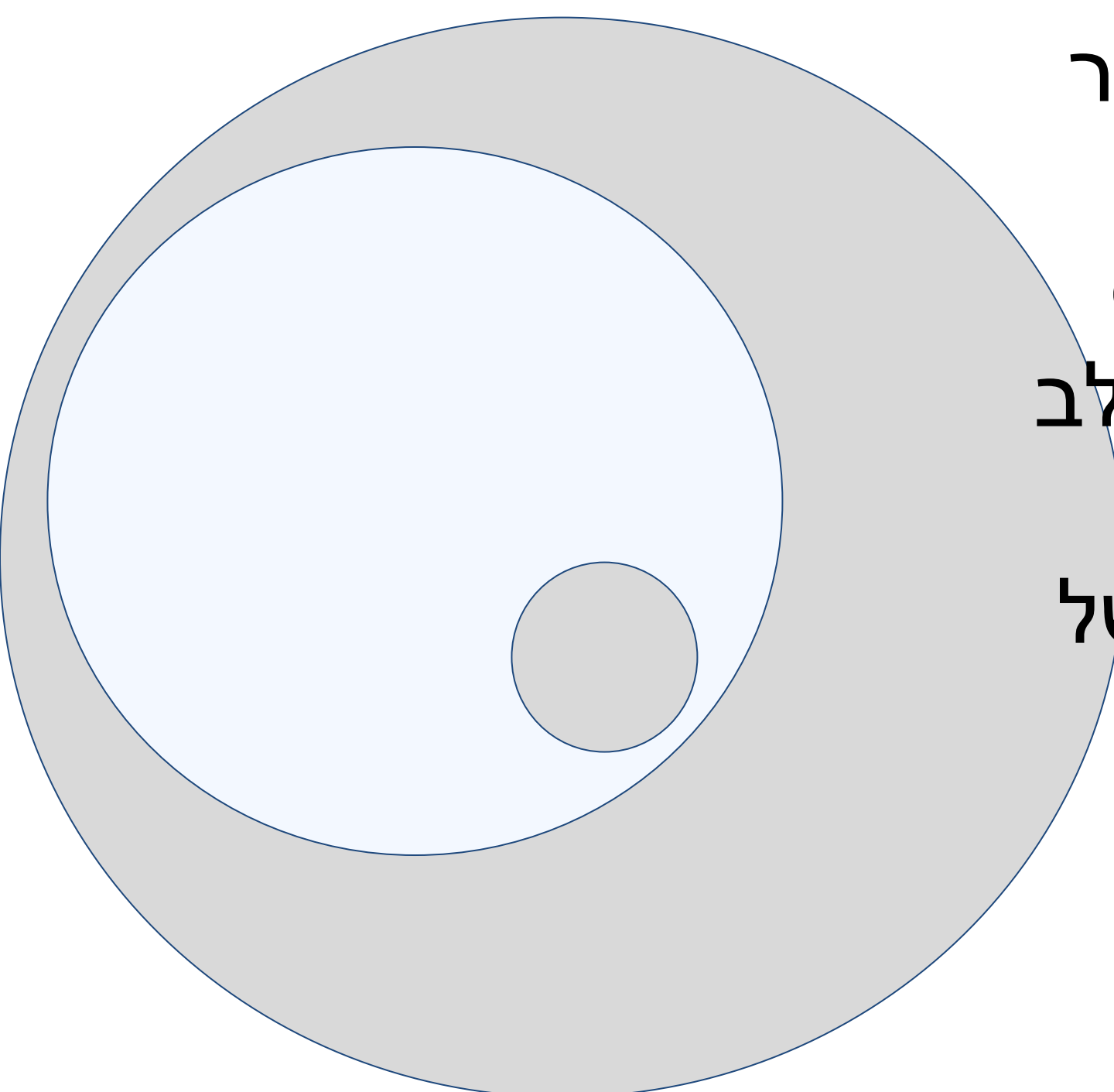
1. בוב ואליס בוחרים מספר בין 0 ל 1
(קודם בוב, אח"כ אליס).

2. בוב בוחר עיגול.

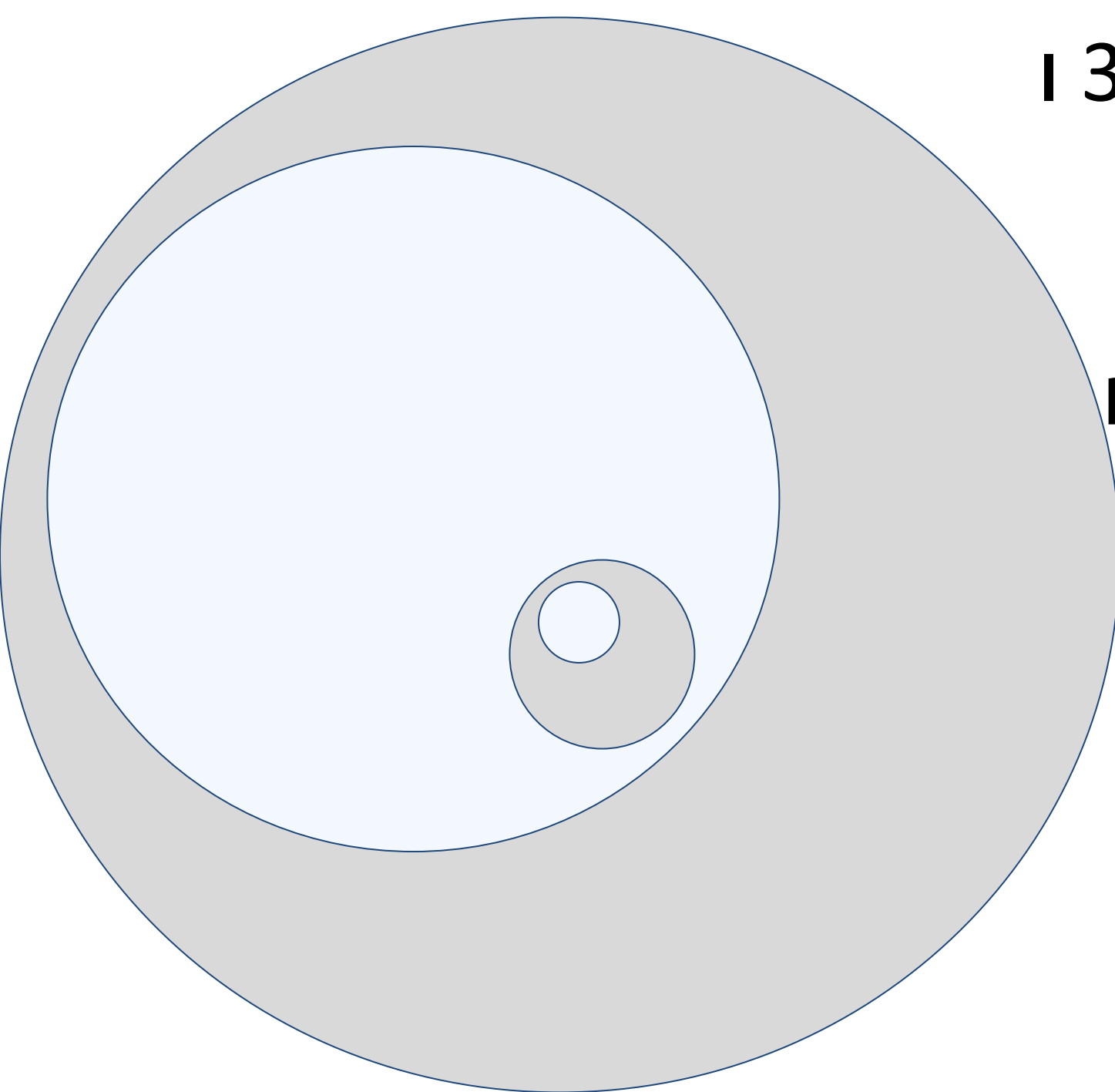




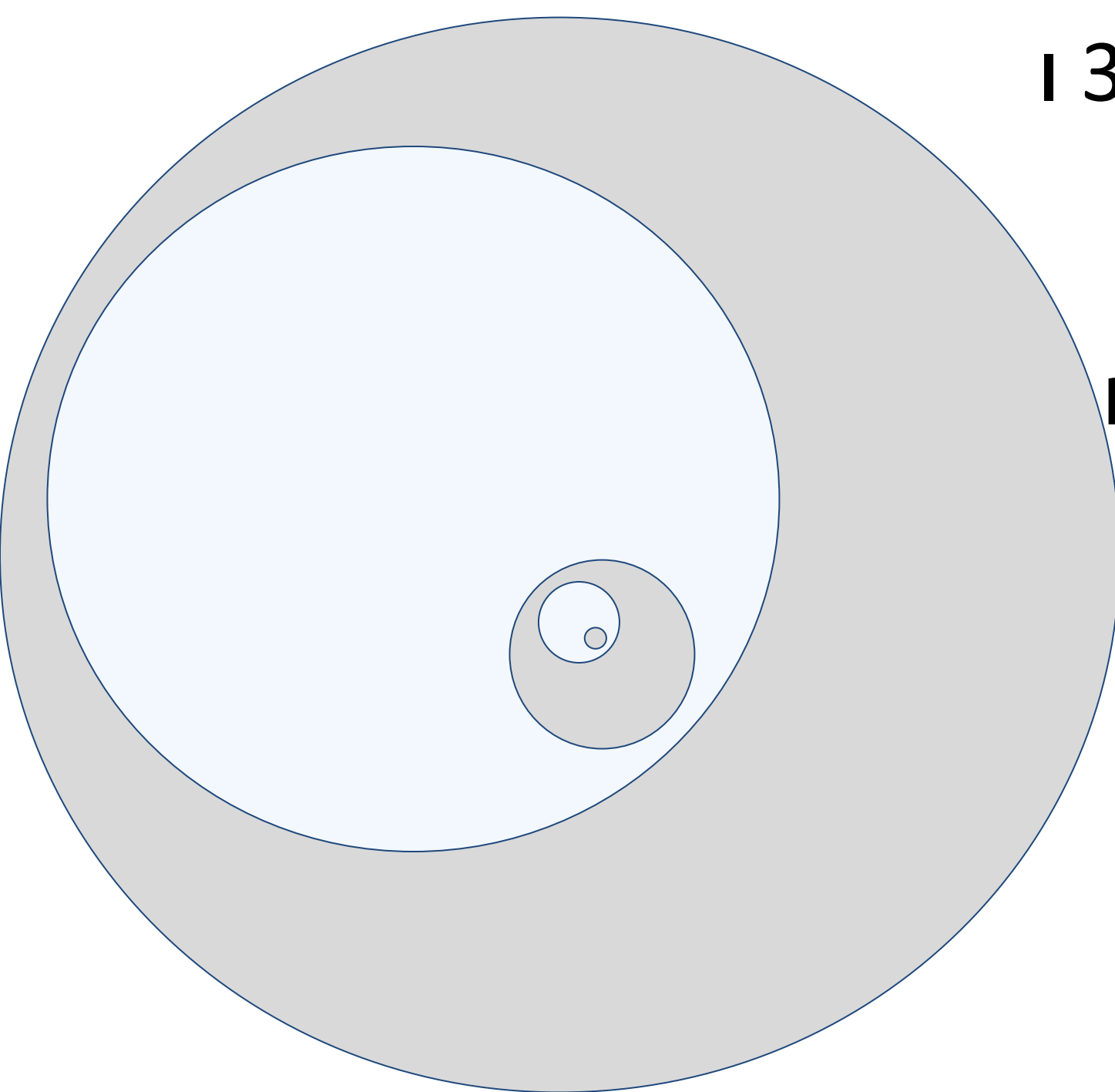
3. אליס
בוחרת
עיגול קטן
ממנו פי
שתיים, כך
שהעיגול
של בוב
מכיל את
העיגול של
אליס.



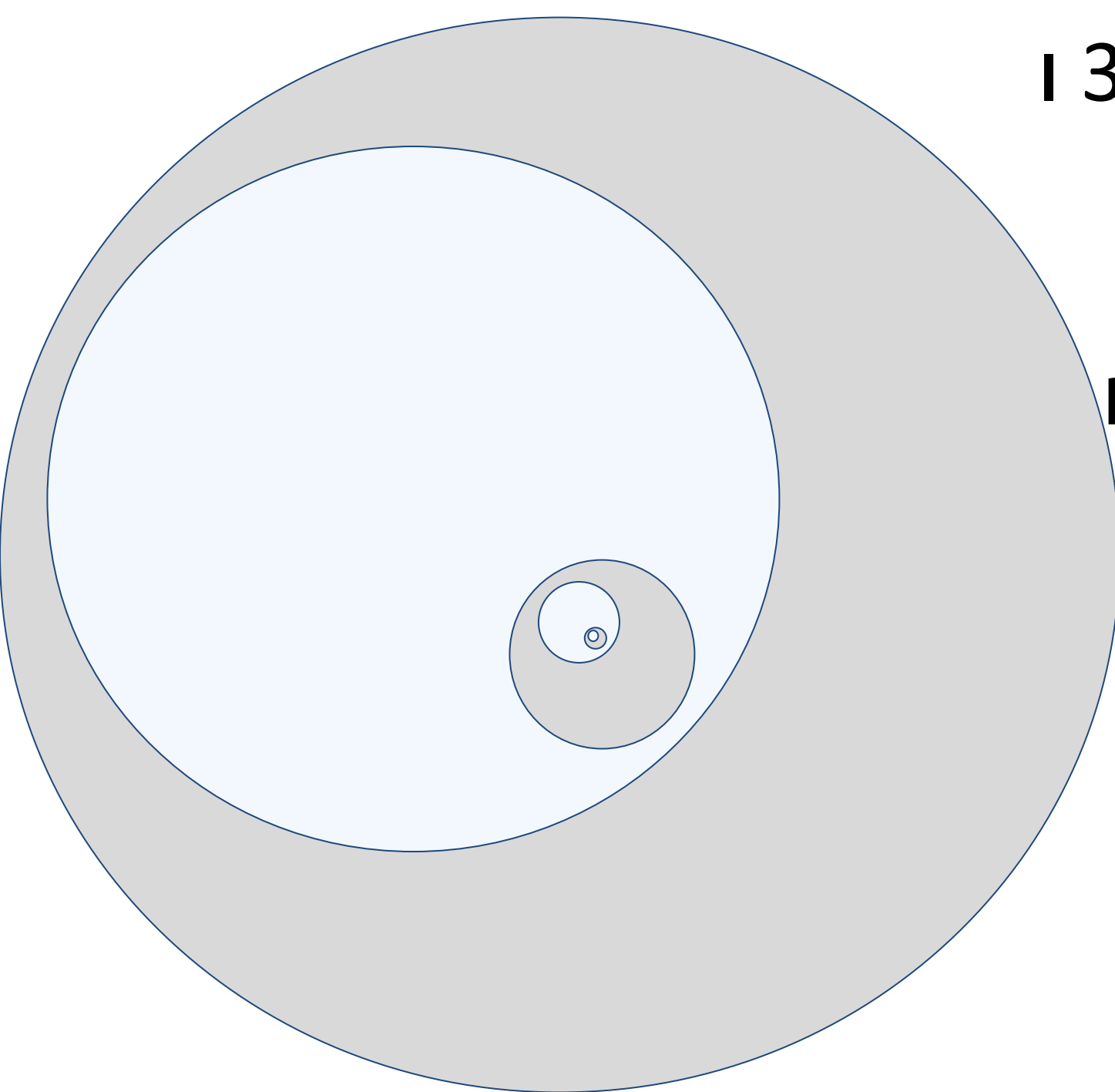
4. בוב בוחר
עיגול קטן
ממנו ביחס
שבחר בשלב
1, כך
שהעיגול של
אליס מכיל
את העיגול
של בוב.



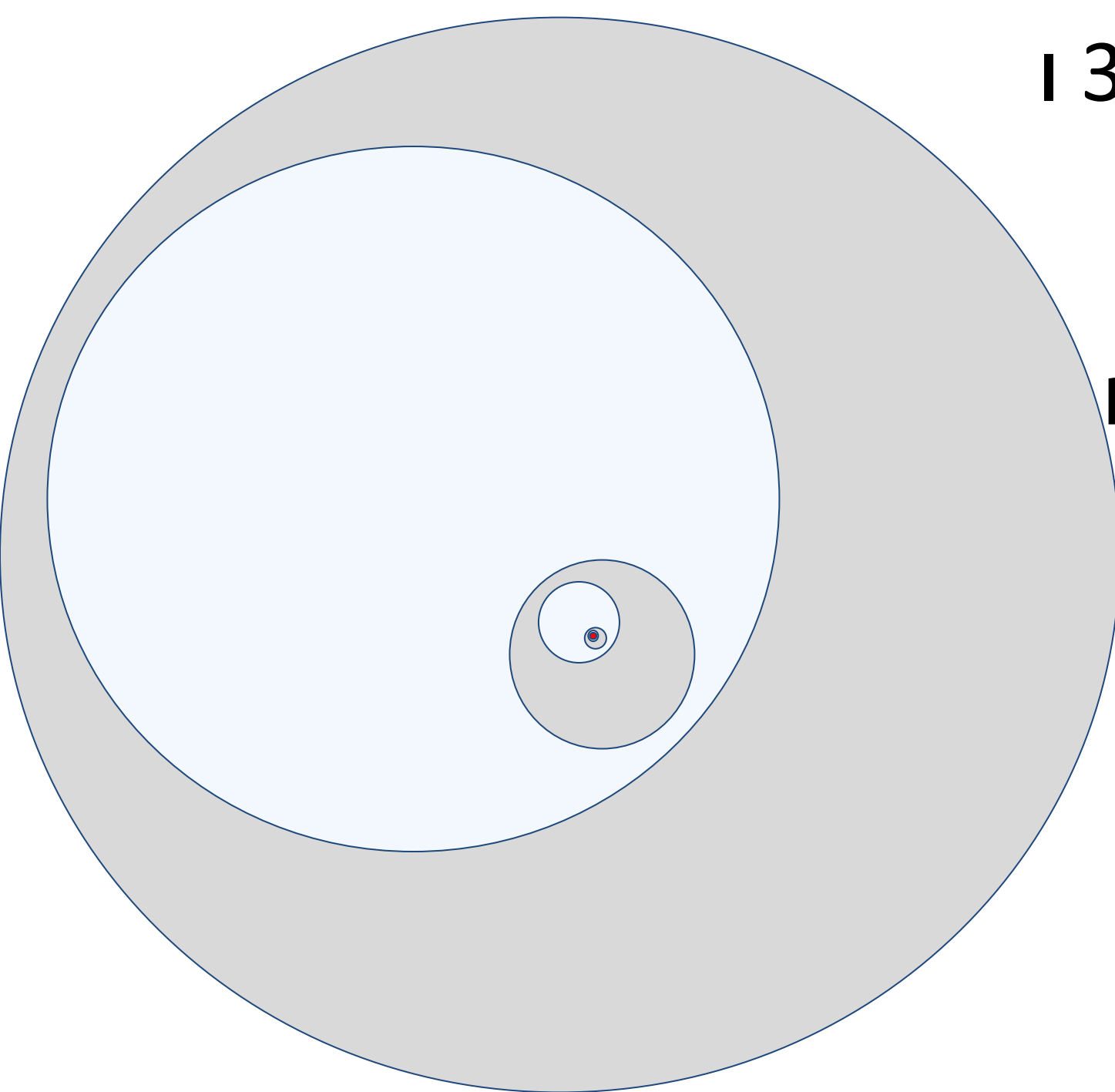
5. שלבים 3 ו
4 חוזרים
חלילה עד
שהעיגולים
מתכנסים
לנקודה.



5. שלבים 3 ו
4 חוזרים
חלילה עד
שהעיגולים
מתכנסים
לנקודה.



5. שלבים 3 ו
4 חוזרים
חלילה עד
שהעיגולים
מתכנסים
לנקודה.



5. שלבים 3 ו
4 חוזרים
חלילה עד
שהעיגולים
מתכנסים
לנקודה.

נקודה זו היא התוצאה
של המשחק!



נקודה זו היא התוצאה
של המשחק!



איך יודעים מי ניצח?

ההשערה של שמידט

לכל אליפסה, אליס יכולה להבטיח
שהתוצאה של המשחק תהיה מחוץ לכל
ההזזות הרציונליות המכוערות ביחס של
המכנה בחזקת שלושה חצאים, של
האליפסה מכוערת ביחס שהיא בחרה
בשלב 1 של המשחק.

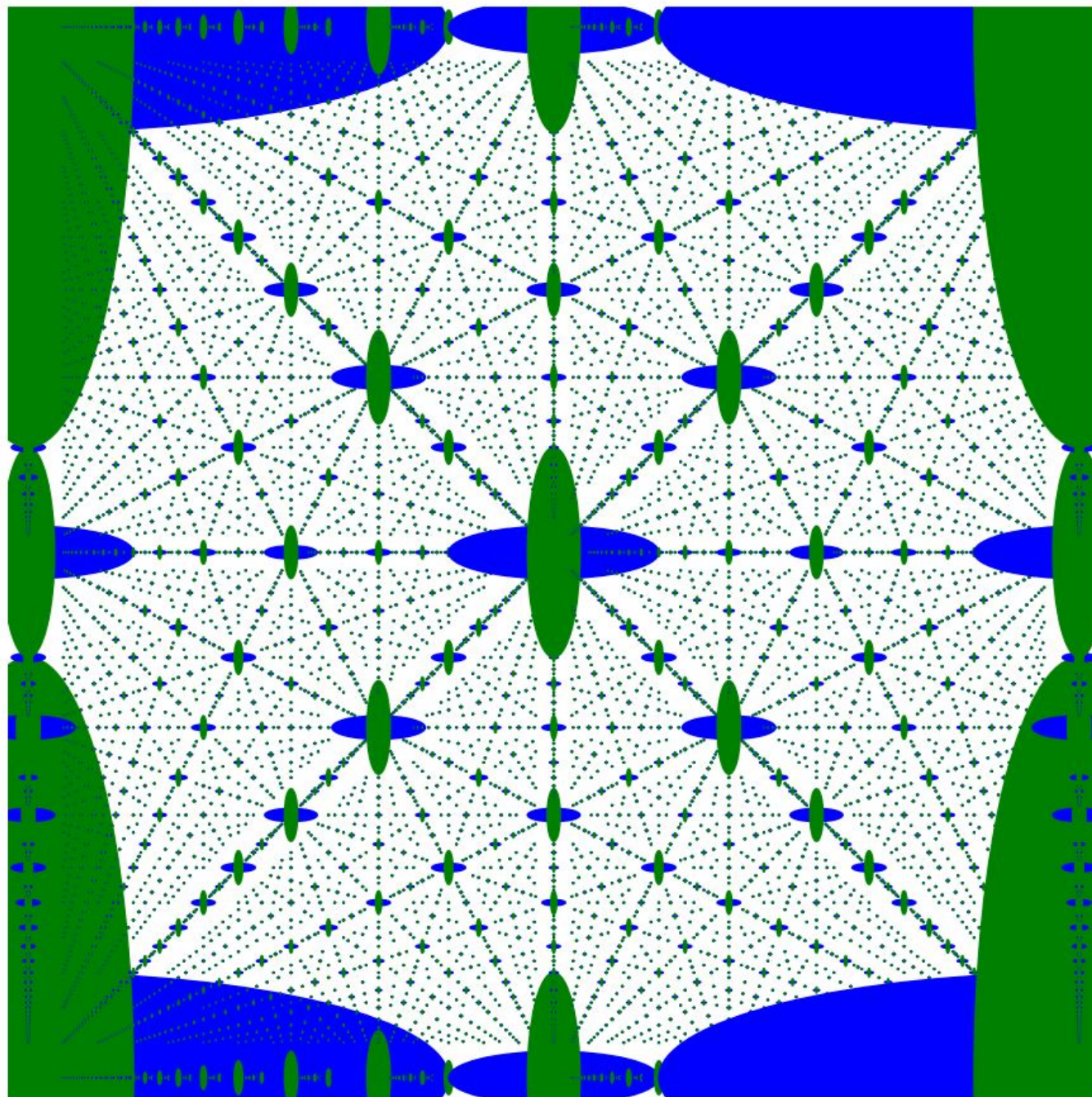




השערת שמידט נכונה

אליס יכולה לנצח במשחק. כלומר, אליס יכולה להתחמק מההזזות המכווצות של כל אליפסה.

מה לגבי יותר מאליפסה אחת בו
זמנית?



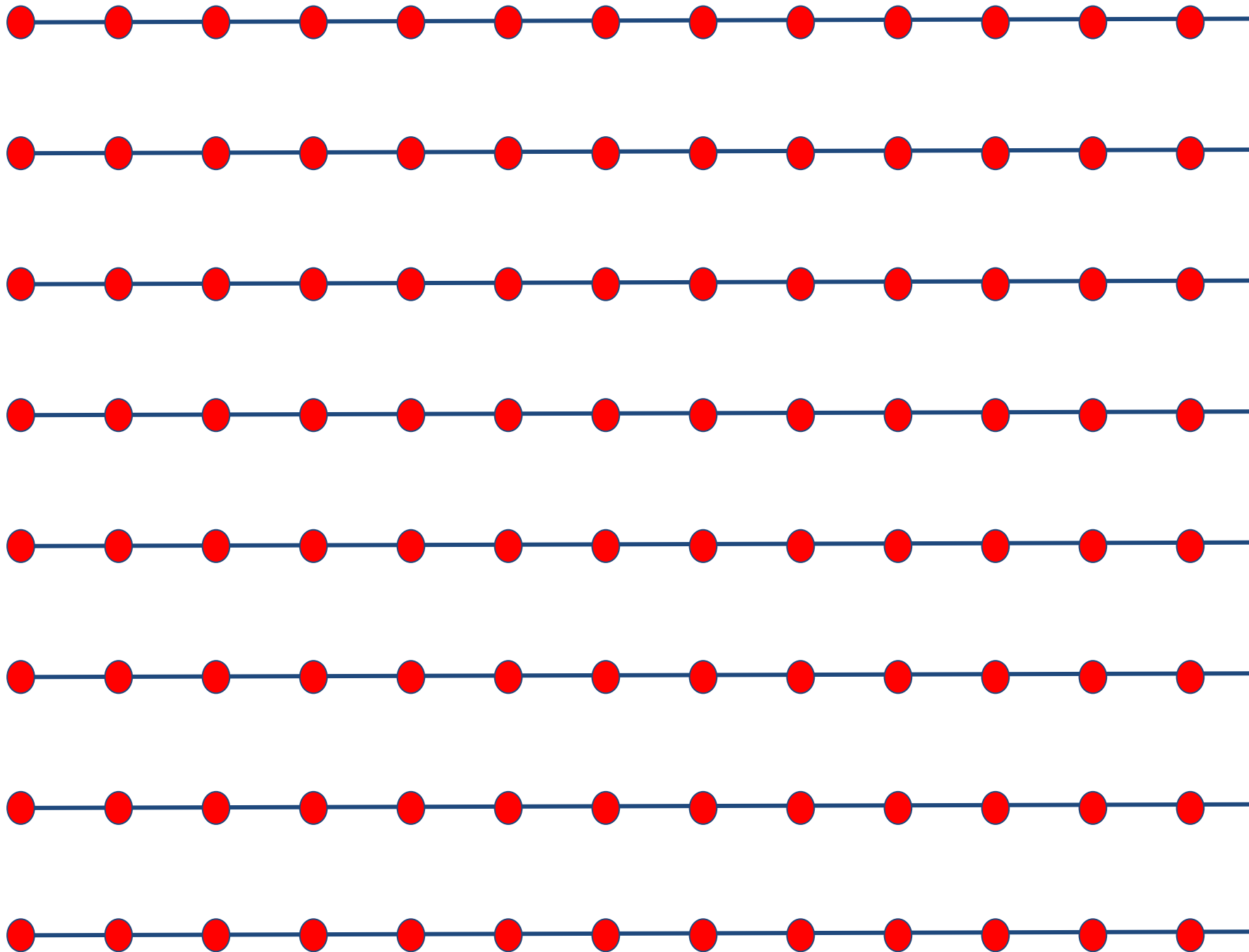


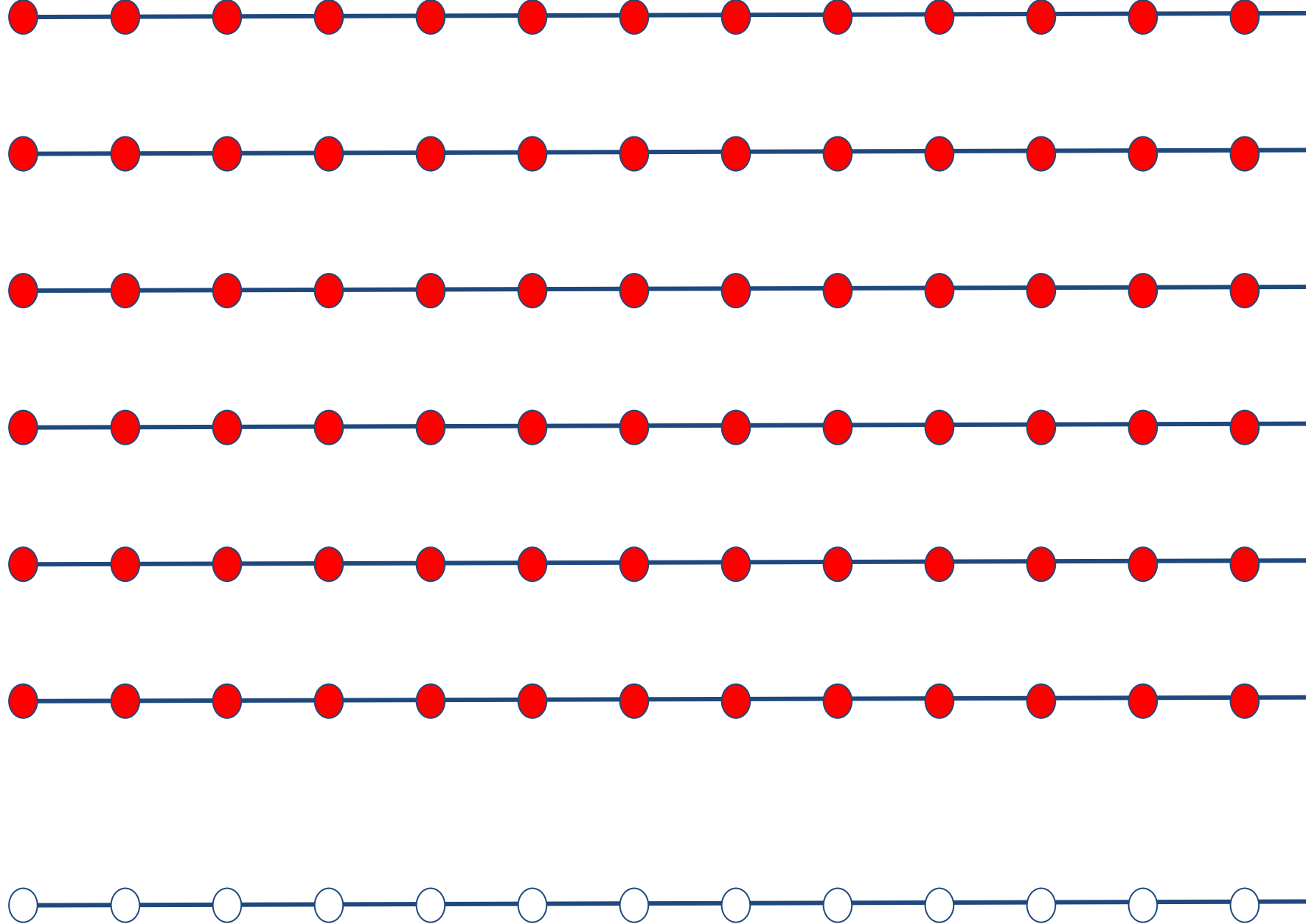
מה לגבי אינסוף אליפסות בו זמנית?

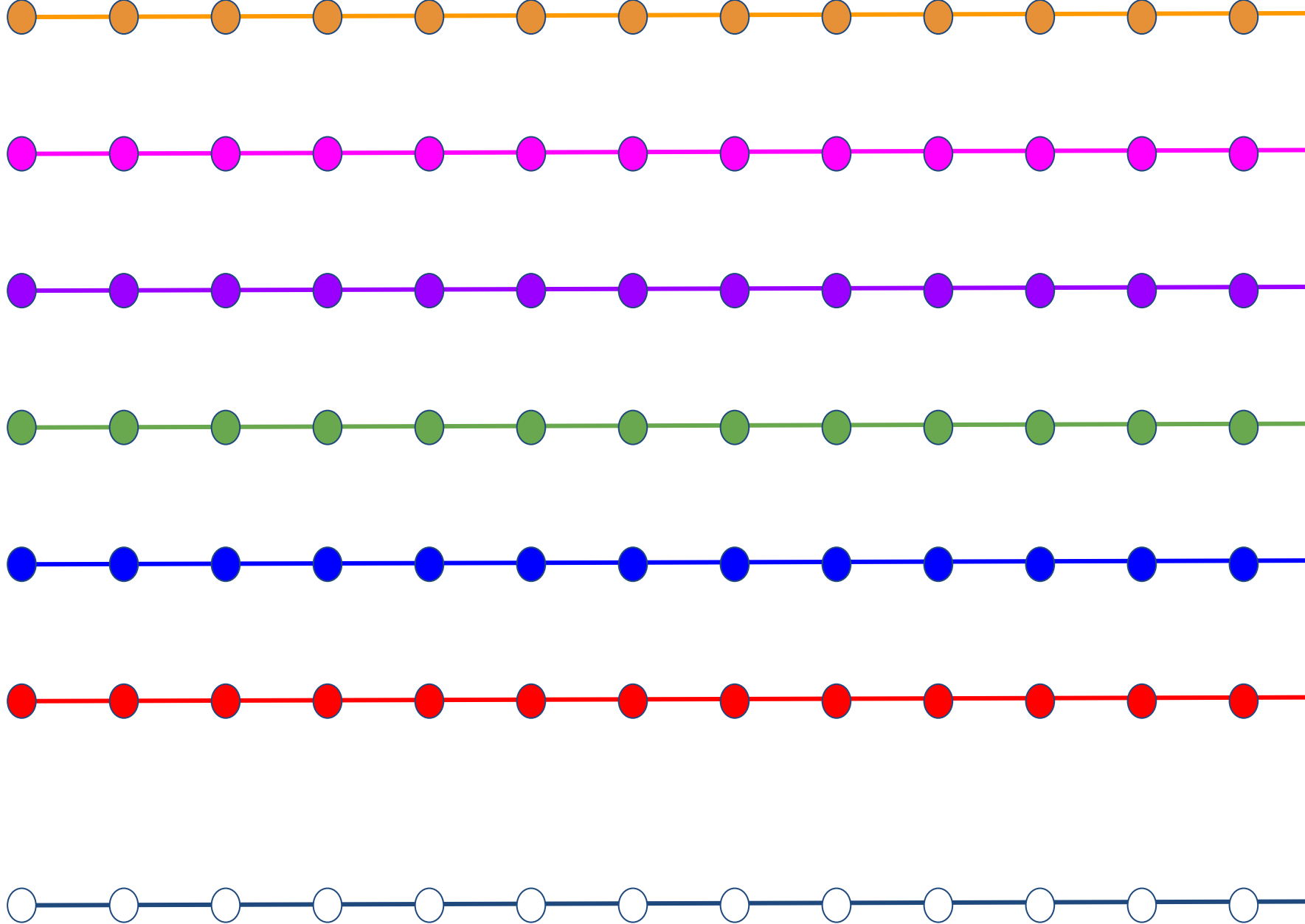
איך לשחק סימולטנית נגד אינסוף
יריבים?

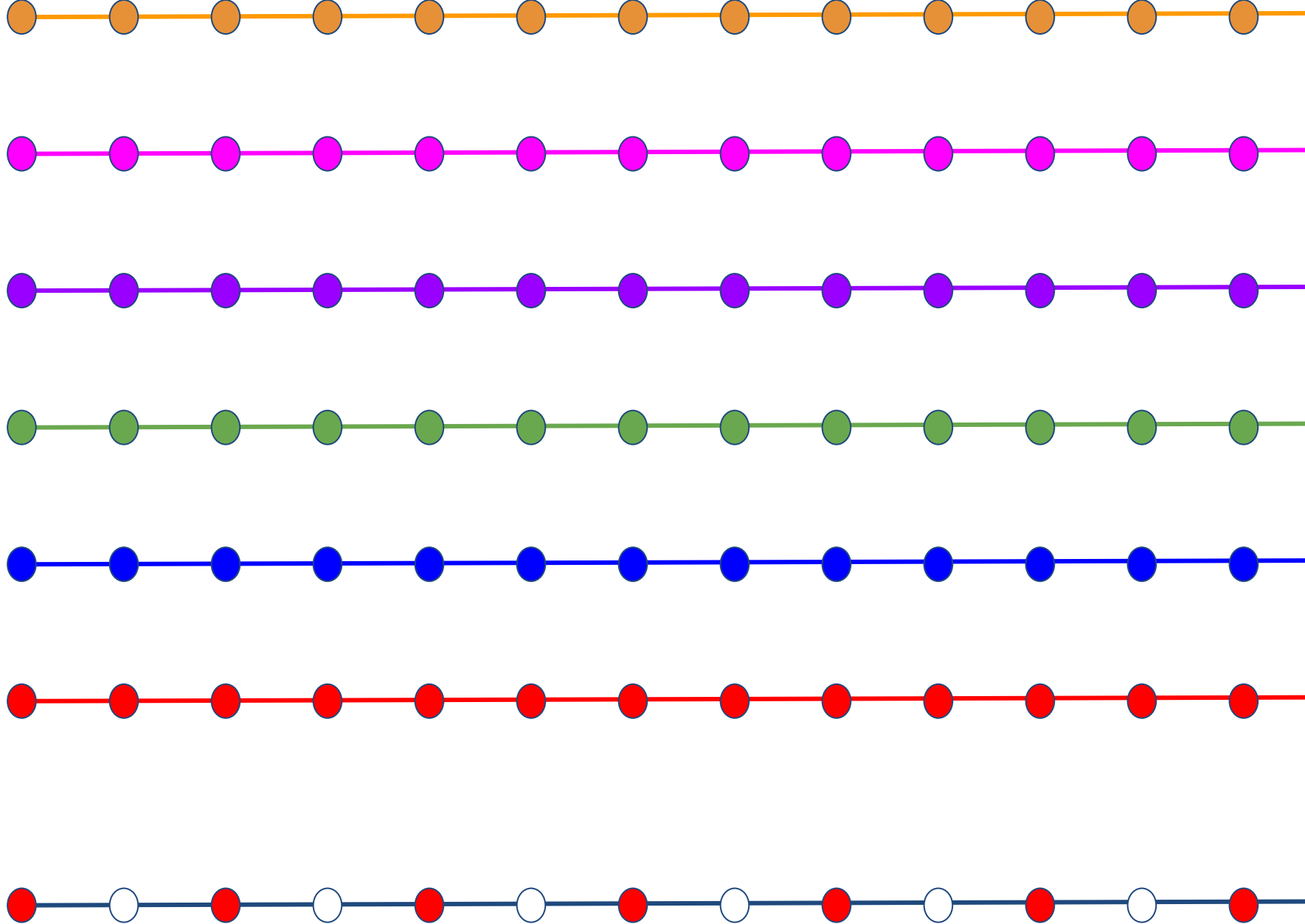
למלון אינסופי מגיעים אינסוף
אוטובוסים אינסופיים.

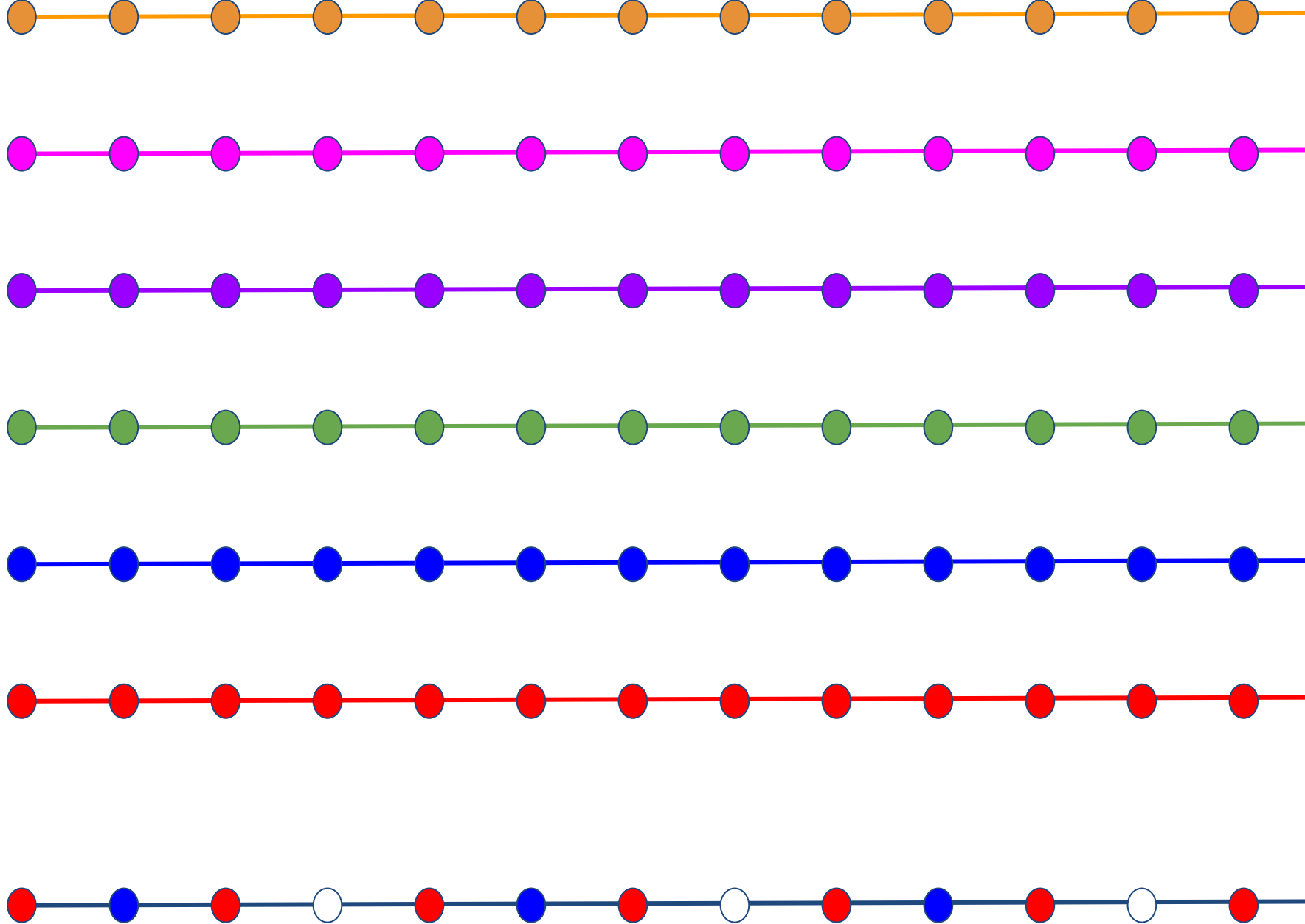
איך להתאים לכל נוסע חדר משלו?

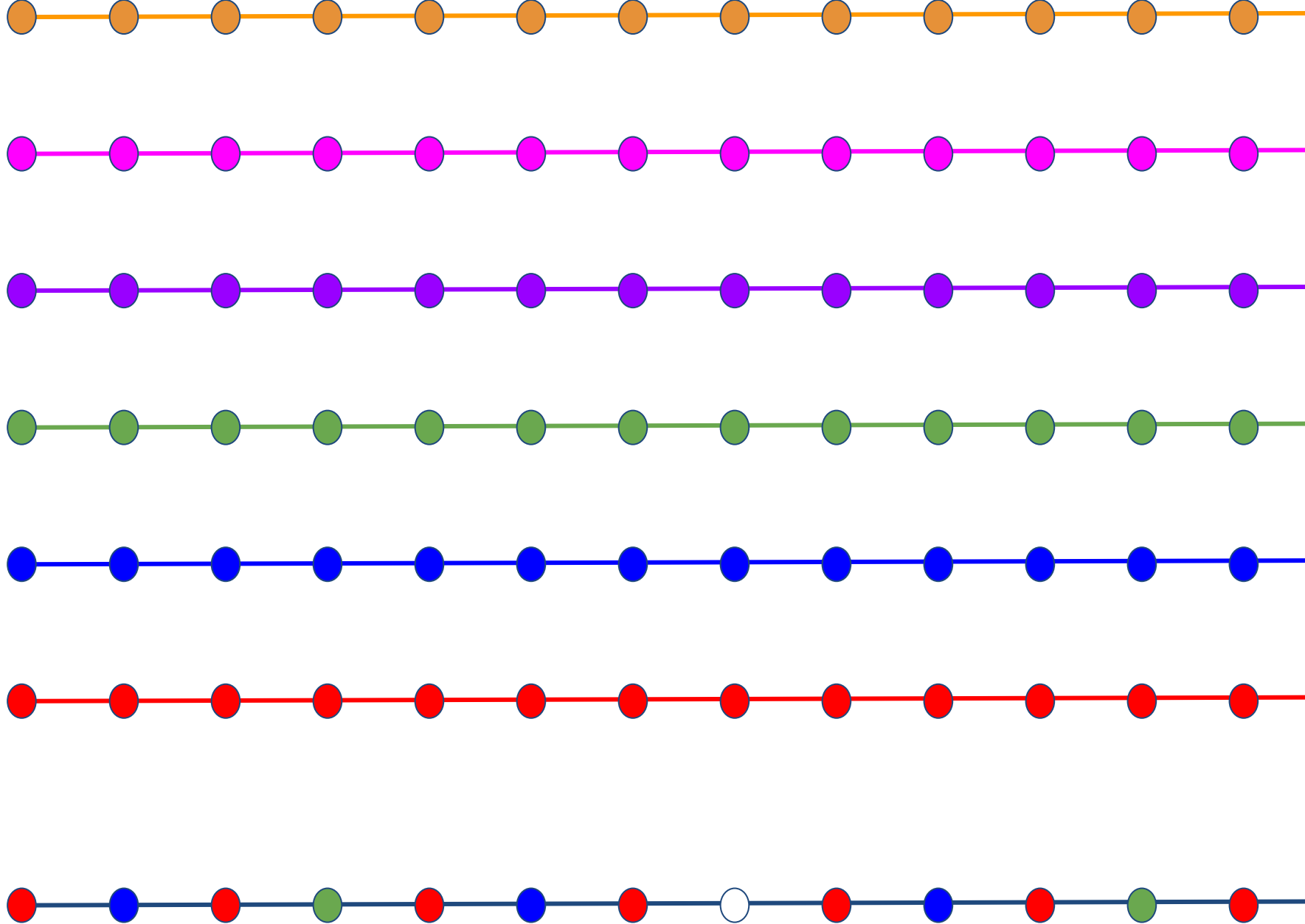






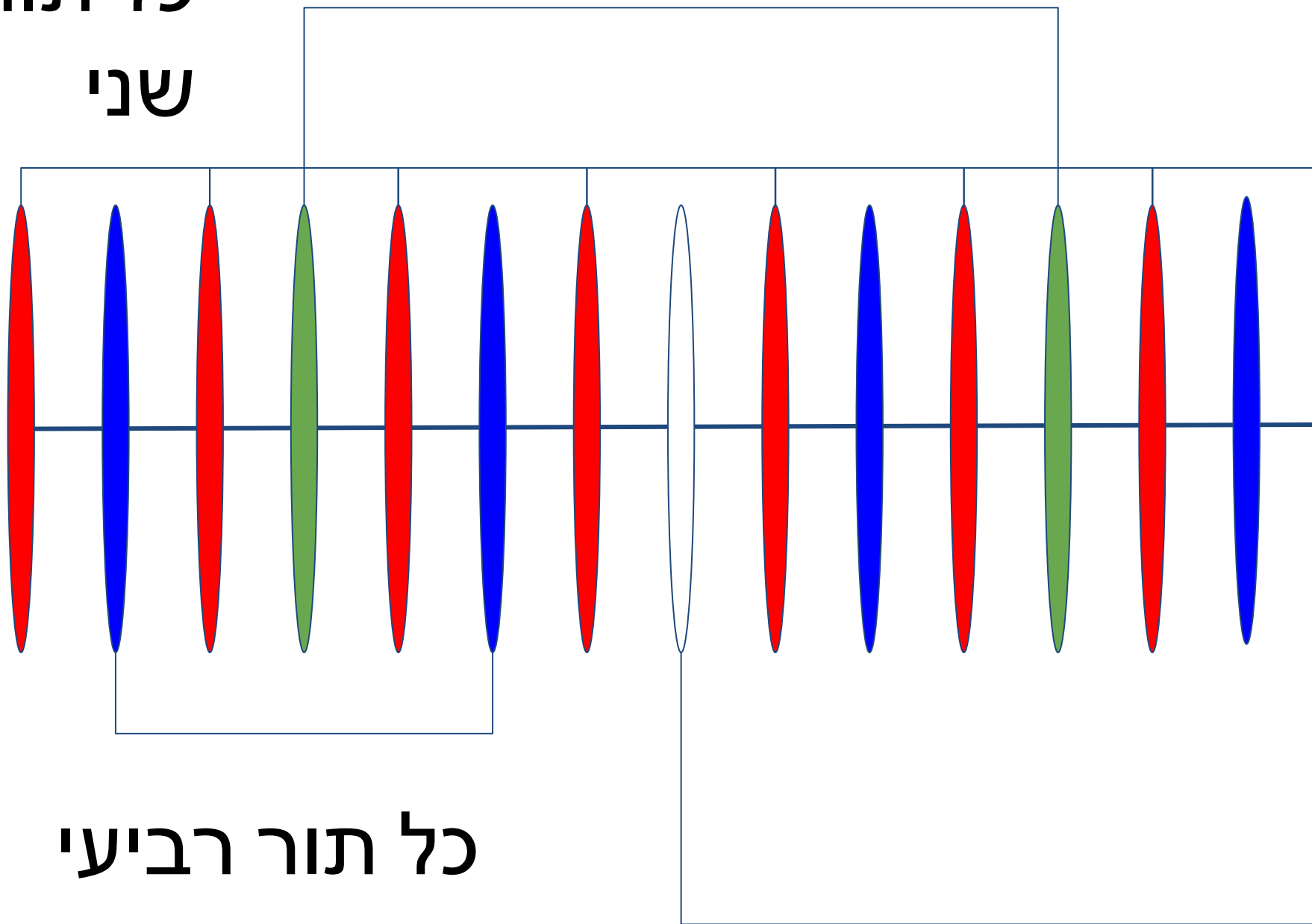






כל תור שמיני

כל תור
שני



**בדרך זו אפשר להתחמק מההזזות
המכווצות של אינסוף אליפסות, אבל לא
מכולן!**

למעשה השאלה האם ניתן להתחמק
מאוסף ההזזות המכווצות של כל
האליפסות בבת אחת דומה מאוד
להשערה של ליטלוד.

בדרך זו אפשר להתחמק מההזזות
המכווצות של אינסוף אליפסות, אבל לא
מכולן!

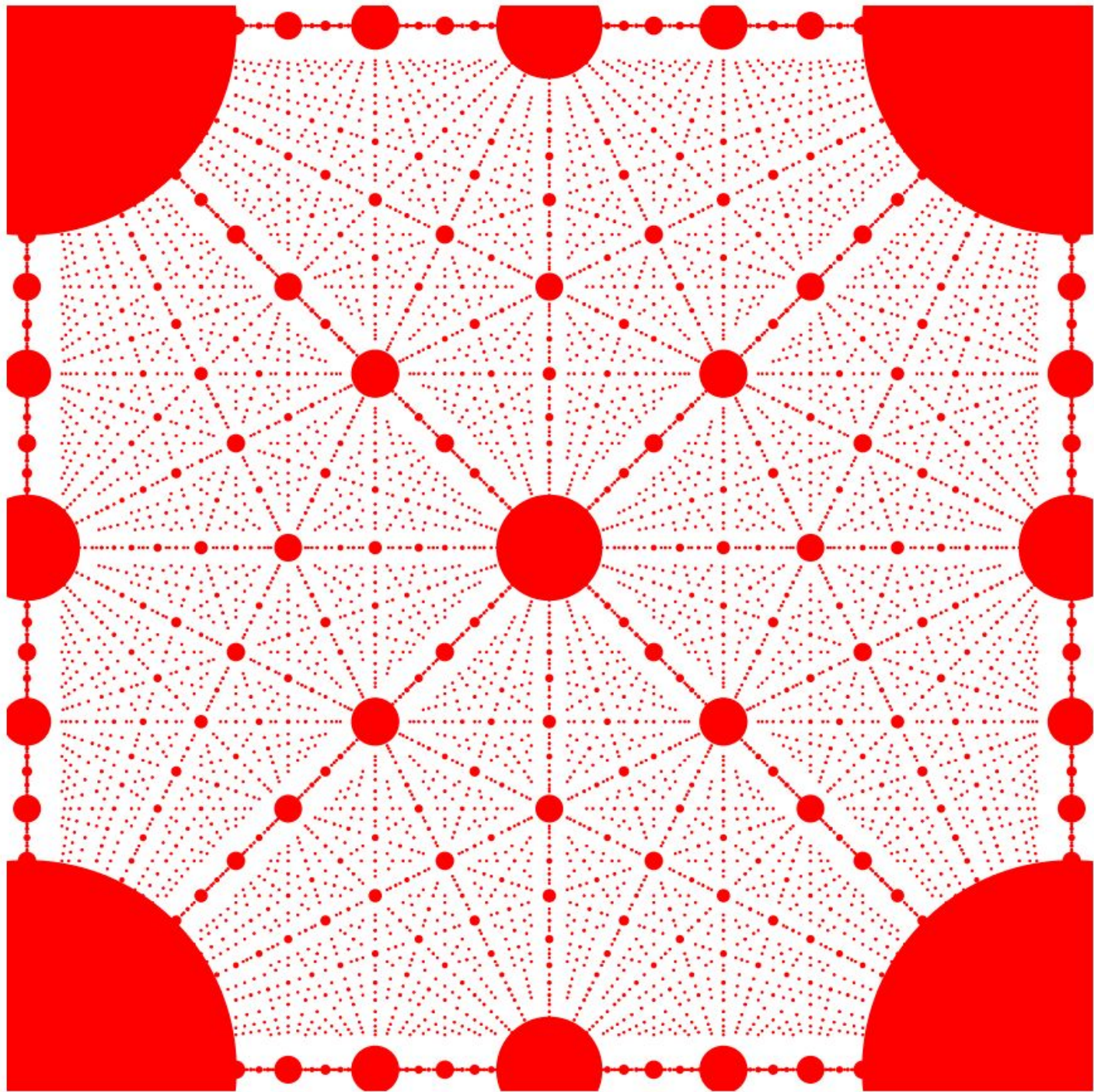
למעשה השאלה האם ניתן להתחמק
מאוסף ההזזות המכווצות של כל
האליפסות בבת אחת דומה מאוד
להשערה של ליטלוד.

סיכום:

1. ההשערה של ליטלוד: אוסף ההזזות המכווצות של כל היפרבולה מכסה את כל המישור.
2. המשפט של אילון: אוסף ההזזות המכווצות של כל היפרבולה מכסה לכל הפחות "כמעט" את כל המישור.
3. משחק שמידט: אליס יכולה להתחמק מאוסף ההזזות המכווצות של כל אליפסה.
4. ע"י משחק סימולטני אפשר להתחמק מאוסף ההזזות המכווצות של אינסוף אליפסות.
5. השערת ליטלוד והשאלה האם ניתן להתחמק מכל האליפסות בזמנית עדיין פתוחות.



ברק וייס



התייחס ברצינות למה שאתה
עושה, ייתכן שזו תהיה
המומחיות שלך.